

Das Dirichlet-Problem V

Ausgewählte Themen gewöhnlicher
Differentialgleichungen und dynamischer
Systeme

Universität Mannheim
Literatur: Inverse Spectral Theory
Prof. Dr. Martin Schmidt

Lisa Mostowoj

November 17, 2025

Einführung

Meine Seminararbeit untersucht das klassische Dirichlet-Problem für die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

unter den Dirichlet-Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Dabei sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $q \in L^2([0, 1])$ reell.

Der Raum $L^2([0, 1])$ bezeichnet hier den Hilbertraum aller reellwertiger Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$, deren Quadrat integrierbar ist. Für dieses Intervall lässt sich die Lösung des Dirichlet-Problems durch eine Folge von Eigenfunktionen beschreiben, die jeweils die zugrunde liegende Differentialgleichung erfüllen.

Die Eigenfunktionen zum n -ten Eigenwert $\mu_n(q)$ bezeichnen wir mit g_n . Im Folgenden arbeiten wir ausschließlich mit *normierten Eigenfunktionen*, das heißt

$$\|g_n\|_{L^2} = 1, \quad g_n(0) > 0.$$

Für diese Eigenfunktionen gilt die explizite Darstellung

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n(q))}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q))\|_{L^2(0,1)}}$$

wobei im Fall $q \equiv 0$ die Standardform

$$g_n(x, 0) = \sqrt{2} \sin(n\pi x)$$

resultiert.

Für die spätere Theorie werden bestimmte Werte der beiden Fundamentallösungen aus dem 1. Kapitel der Literatur entscheidend:

$$y_1(0, \mu) = 1, \quad y_1'(0, \mu) = 0, \quad y_2(0, \mu) = 0, \quad y_2'(0, \mu) = 1$$

Jede Lösung der Differentialgleichung lässt sich als Linearkombination dieser beiden Fundamentallösungen darstellen. Insbesondere ist eine Zahl λ genau dann ein Dirichlet-Eigenwert, wenn

$$y_2(1, \lambda) = 0.$$

Diese Charakterisierung motiviert die sogenannte *shooting method*: Man schießt die Lösung y_2 bei $x = 0$ mit Anfangsneigung 1 und variiert λ so lange, bis die Lösung bei $x = 1$ wieder den Wert Null erreicht.

Theorem 7

Für jedes $q \in L^2[0, 1]$ bildet die Folge

$$g_n(x, q), \quad n \geq 1$$

eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $L^2[0, 1]$.

Beweis

1. Orthonormalität

Man betrachte zwei verschiedene Eigenfunktionen g_m, g_n mit den zugehörigen Eigenwerten μ_m, μ_n , die folgende Eigenwertgleichungen erfüllen:

$$\text{I:} \quad -g_m'' + qg_m = \mu_m g_m, \quad \text{II:} \quad -g_n'' + qg_n = \mu_n g_n.$$

Multiplizieren wir (I) mit g_n und (II) mit g_m :

$$\text{I:} \quad -g_m'' g_n + qg_m g_n = \mu_m g_m g_n,$$

$$\text{II:} \quad -g_n'' g_m + qg_n g_m = \mu_n g_n g_m.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert:

$$-g_m'' g_n + g_n'' g_m = (\mu_m - \mu_n) g_m g_n \quad (1)$$

Integration von (1) über $[0, 1]$ liefert:

$$\begin{aligned} (\mu_m - \mu_n) \int_0^1 g_m g_n \, dx &= \int_0^1 (g_m g_n'' - g_m'' g_n) \, dx \\ &= \int_0^1 (g_m g_n'' + g_m' g_n' - g_m' g_n' - g_m'' g_n) \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dx} (g_m g_n' - g_m' g_n) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mu_m - \mu_n) \int_0^1 g_m g_n \, dx &= \int_0^1 \frac{d}{dx} [g_m, g_n] \, dx \\
&= [[g_m, g_n]]_0^1 \\
&= g_m(1)g'_n(1) - g'_m(1)g_n(1) - g_m(0)g'_n(0) + g'_m(0)g_n(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

wobei letzte Gleichheit aus den Dirichlet-Randbedingungen $g_m(0) = g_n(0) = g_m(1) = g_n(1) = 0$ folgt. Hierbei müssen die Ableitungen $g'_n(0)$, $g'_m(0)$, $g'_n(1)$, $g'_m(1)$ nicht notwendigerweise 0 sein.

Da $m \neq n$ folgt $(\mu_m - \mu_n) \neq 0$ und damit

$$(\mu_m - \mu_n) \int_0^1 g_m g_n \, dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 g_m g_n \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle g_m, g_n \rangle = 0$$

Demnach sind g_m und g_n orthogonal.

Die **Orthonormalität** folgt unmittelbar aus der Definition der Eigenfunktionen. Diese sind normiert, das heißt

$$\langle g_m, g_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

Daher also g_m, g_n orthonormal.

2. Vollständigkeit

Man zeigt jetzt, dass die Menge der g_n vollständig ist, also eine Basis des Hilbertraums $L^2[0, 1]$ bildet. Der Beweis nutzt zunächst den Vergleich mit der bekannten **Sinusbasis**.

Im Spezialfall $q = 0$ sind die Eigenfunktionen des betrachteten Problems gegeben durch

$$g_n(x, 0) = \sqrt{2} \sin(\pi n x) =: e_n(x).$$

Diese $e_n(x)$ bilden eine **Orthonormalbasis** des Hilbertraums $L^2[0, 1]$, was leicht nachzurechnen ist.

Für den allgemeinen Fall $q \neq 0$ gilt nach **Theorem 4**, dass die Eigenfunktionen $g_n(x, q)$ die Form

$$g_n(x, q) = \sqrt{2} \sin(\pi n x) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

annehmen. Durch die quadratsummierbaren Störterme handelt es sich bei den g_n um kleine, stetige Störungen der bekannten Orthonormalbasis (e_n) .

Man definiere den Operator

$$A : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1], \quad Af := \sum_{n \geq 1} a_n g_n$$

mit

$$a_n = \langle f, e_n \rangle = \int_0^1 f(x) e_n(x) dx, \quad f \in L^2([0, 1]).$$

A ist der Basiswechseloperator, der die Sinusbasis e_n durch die Eigenfunktionen g_n ersetzt. Da e_n eine Orthonormalbasis ist, kann das **Parseval–Riesz–Fischer-Theorem** angewandt werden.

Parseval–Riesz–Fischer-Theorem

Für eine Orthonormalbasis gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{L^2}^2, \quad f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n e_n,$$

mit Konvergenz in $L^2[0, 1]$.

Das Theorem zeigt, dass die Summe der Betragsquadrate $|a_n|^2$ endlich ist, weshalb (a_n) im Raum der quadratsummierbaren Folgen liegt. Zusätzlich gilt aus dem oberen Teil des Beweises die Orthonormalität der g_n .

Demnach konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x)$$

im Hilbertraum $L^2[0, 1]$, und Af ist für alle $f \in L^2$ wohldefiniert.

Die Idee hinter dem Definieren dieses Operators liegt darin, zu zeigen, dass A eine **Isometrie** ist. Denn dann ist A insbesondere injektiv und bildet den L^2 -Raum der Sinusbasis isometrisch auf den Raum der g_n ab.

Nachrechnen der Isometrie

1. Endliche Summen:

Sei

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n g_n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|S_N\|_{L^2}^2 &= \langle S_N, S_N \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^N a_n g_n, \sum_{m=1}^N a_m g_m \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m \langle g_n, g_m \rangle \\ &= \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die dritte Gleichheit aus der Bilinearität des Skalarprodukts und die vierte aus der Orthonormalität der g_n folgt.

2. Grenzübergang $N \rightarrow \infty$:

S_N konvergiert in $L^2[0, 1]$ gegen den Grenzwert Af (Parseval–Riesz–Fischer).

Damit und mit (1) folgt:

$$\|Af\|_{L^2}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

wobei in der ersten Gleichheit Norm und Limes vertauscht werden dürfen, da S in $L^2[0, 1]$ gegen Af konvergiert und die Norm stetig ist. Die zweite Gleichheit folgt aus (1) und die letzte aus dem Parseval-Riesz-Fischer Theorem.

Also ist A eine Isometrie.

Mit dem **Hilbert-Schmidt-Theorem** sowie dem **Theorem D1** lässt sich zeigen, dass

$$A = I + K$$

mit K **Hilbert-Schmidt** ein Operator ist, der von der Identität nur um eine Hilbert-Schmidt-Störung abweicht.

Hilbert-Schmidt-Theorem

Ein Operator T auf $L^2[0, 1]$ heißt *Hilbert-Schmidt*, wenn

$$\sum_{n \geq 1} \|Te_n\|_{L^2}^2 < \infty \quad \text{für eine Orthonormalbasis } (e_n).$$

Theorem D1 sagt dann, dass jeder Hilbert-Schmidt-Operator kompakt ist.

Aus

$$Ae_n = \sum_{m \geq 1} \langle e_n, e_m \rangle g_m = g_n$$

folgt

$$(A - I)e_n = Ae_n - Ie_n = g_n - e_n \quad (2)$$

und mit (2) sowie der Asymptotik aus Theorem 4 dann

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \|(A - I)e_n\|_{L^2}^2 &= \sum_{n \geq 1} \|g_n - e_n\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{n \geq 1} O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty \end{aligned}$$

Also ist $(A - I)$ ein **Hilbert-Schmidt-Operator**, der nach Theorem D1 kompakt ist. Es werden oft kompakte Störungen der Identität betrachtet. Das sind genau Operatoren der Form $I + K$ mit I Identität und K kompakt. Solche Operatoren werden als Fredholm Operatoren bezeichnet, für welche die Fredholm Alternative gilt.

Theorem D2 - Fredholm Alternative

Sei A ein **Fredholm-Operator**.

Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:

$$A \text{ ist beschränkt invertierbar} \Leftrightarrow A \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow A \text{ ist injektiv}$$

Aus der Isometrie von A und der daraus resultierenden Injektivität, folgt mit der Fredholm Alternative, dass A surjektiv ist und eine negative Inverse besitzt. Da $Ae_n = g_n$ für alle $n \geq 1$ bildet A die Orthonormalbasis (e_n) **isometrisch und bijektiv** auf das System (g_n) ab. Mit der Orthonormalität der g_n sowie der Vollständigkeit, die daraus folgt, dass A surjektiv ist und das Bild von A ganz $L^2[0, 1]$ umfasst, folgt die Aussage des Theorems. **q.e.d.**

Es gibt elementarere Beweise für die Vollständigkeit der Dirichlet Eigenfunktionen, die sich nicht auf die Fredholm Alternative stützen. Zum Beispiel machten Birkhoff und Rota interessante historische Bemerkungen. Die hier verwendete Methode ist dennoch leichter zu verallgemeinern. Grob gesagt gilt, dass jede Folge von Vektoren, die linear unabhängig ist und hinreichend nah an einer Orthonormalbasis liegt selbst eine Basis ist. **Theorem D3** formuliert diese Aussage präzise und wird auch im folgenden nützlich sein. Tatsächlich wird Theorem 7 hier nie direkt benötigt, sondern nur als Prototyp für andere Vollständigkeitssätze aufgenommen.

Theorem 8

Für $m, n \geq 1$ gilt:

$$(a) \quad \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle = 0,$$

$$(b) \quad \left\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \delta_{mn},$$

$$(c) \quad \left\langle a_m, \frac{d}{dx} a_n \right\rangle = 0.$$

Das Theorem beschreibt entscheidende orthogonale Relationen und dient als Grundlage für vieles was in dieser Seminararbeit folgt.

Die Funktionen a_m definieren hierbei das Produkt der beiden Fundamentallösungen zum selben Eigenwert, das heißt

$$a_m(x) = y_1(x, \mu_m) y_2(x, \mu_m).$$

Die Definition stammt aus der allgemeinen Konstruktion der Fundamentallösung im 1. Kapitel der Literatur.

Beweis

Teil A

1. Partielle Integration

$$\begin{aligned}\left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= \int_0^1 g_m^2 (g_n^2)' dx \\&= [g_m^2 g_n^2]_0^1 - \int_0^1 (g_m^2)' g_n^2 dx \\&= - \int_0^1 (g_m^2)' g_n^2 dx \\&= \frac{1}{2} \left(- \int_0^1 (g_m^2)' g_n^2 dx - \int_0^1 (g_m^2)' g_n^2 dx \right) \\&= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 g_m^2 (g_n^2)' dx - \int_0^1 (g_m^2)' g_n^2 dx \right) \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 (g_m^2 (g_n^2)' - (g_m^2)' g_n^2) dx \\&= \frac{1}{2} \int_0^1 (g_m^2 2g_n g_n' - 2g_m g_m' g_n^2) dx \\&= \int_0^1 g_m g_n (g_m g_n' - g_m' g_n) dx \\&= \int_0^1 g_m g_n [g_m, g_n] dx\end{aligned}$$

Fall 1: $m = n$

Dann gilt $[g_n, g_n] = [g_m, g_m] = 0$

$$\text{Also } \left\langle g_n^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle = \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_m^2 \right\rangle = 0$$

Fall 2: $m \neq n$

Für zwei Eigenfunktionen mit verschiedenen μ_m, μ_n gilt:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad -g_m'' + qg_m &= \mu_m g_m & \Longleftrightarrow & \quad g_m'' = qg_m - \mu_m g_m, \\ \text{II:} \quad -g_n'' + qg_n &= \mu_n g_n & \Longleftrightarrow & \quad g_n'' = qg_n - \mu_n g_n. \end{aligned}$$

Setzt man diese Gleichungen in die Ableitung des Wronskian ein, erhält man:

$$\begin{aligned} [g_m, g_n]' &= g_m' g_n' + g_m g_n'' - g_m'' g_n - g_m' g_n' \\ &= g_m g_n'' - g_m'' g_n \\ &= g_m (qg_n - \mu_n g_n) - (qg_m - \mu_m g_m) g_n \\ &= (\mu_m - \mu_n) g_m g_n \end{aligned}$$

also

$$g_m g_n = \frac{1}{\mu_m - \mu_n} [g_m g_n]'$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_m g_n [g_m, g_n] &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n} \int_0^1 [g_m, g_n]' [g_m, g_n] dx \\ &= \frac{1}{2(\mu_m - \mu_n)} \left[[g_m, g_n]^2 \right]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus den Dirichlet-Randbedingungen folgt.

Teil B

Mit partieller Integration und den Dirichlet-Randbedingungen gilt

$$\begin{aligned}\left\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= \int_0^1 a_m (g_n^2)' dx \\ &= [a_m g_n^2]_0^1 - \int_0^1 a'_m g_n^2 dx \\ &= - \int_0^1 a'_m g_n^2 dx\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}2 \left\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= 2 \int_0^1 a_m (g_n^2)' dx \\ &= \int_0^1 a_m (g_n^2)' dx - \int_0^1 a'_m g_n^2 dx \\ &= \int_0^1 (a_m (g_n^2)' - a'_m g_n^2) dx \\ &= \int_0^1 (y_1 g_n [y_2, g_n] + y_2 g_n [y_1, g_n]) dx\end{aligned}$$

wobei letzte Gleichheit aus dem Einsetzen der Definition von a_m folgt, das heißt

$$\begin{aligned}a_m (g_n^2)' - a'_m g_n^2 &= 2y_1 y_2 g_n g'_n - (y'_1 y_2 + y_1 y'_2) g_n^2 \\ &= y_1 y_2 g_n g'_n + y_1 y_2 g_n g'_n - y'_1 y_2 g_n^2 - y_1 y'_2 g_n^2 \\ &= g_n (y_1 (y_2 g'_n - y'_2 g_n) + y_2 (y_1 g'_n - y'_1 g_n)) \\ &= y_1 g_n [y_2, g_n] + y_2 g_n [y_1, g_n]\end{aligned}$$

Fall 1: $m = n$

Dann ist y_2 eine zweite Lösung derselben Eigenwertgleichung wie g_n und damit ein Vielfaches von g_n . Es gilt also

$$y_2 = c g_n \quad \text{mit } c \neq 0$$

und damit

$$[y_2, g_n] = c(g_n g'_n - g'_n g_n) = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 2 \left\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= \int_0^1 y_2 g_n [y_1, g_n] dx \\ &= \int_0^1 (y_2 g_n y_1 g'_n + g_n^2 y_1 y'_2 - g_n^2 y_1 y'_2 - y_2 g_n y'_1 g_n) dx \\ &= \int_0^1 (y_1 g_n [y_2, g_n] + g_n^2 [y_1, y_2]) dx \\ &= \int_0^1 g_n^2 [y_1, y_2] dx \\ &= \int_0^1 g_n^2 \cdot 1 dx \\ &= \int_0^1 g_n^2 dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

wobei letzte Gleichheit daraus folgt, dass die g_n normiert sind.

Die fünfte Gleichheit folgt aus

$$[y_1, y_2] = 1$$

denn

$$\begin{aligned} [y_1, y_2]' &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \\ &= y_1 (q - \mu) y_2 - (q - \mu) y_1 y_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also gilt für zwei Lösungen y_1 und y_2 derselben Differentialgleichung

$$[y_1, y_2]' = 0.$$

Demnach ist der Wronskian $[y_1, y_2]$ fast überall konstant. Da er aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist, ist er außerdem stetig.

Mit der Stetigkeit und der Auswertung an der Stelle $x = 0$ folgt dann:

$$[y_1, y_2](x) = [y_1, y_2](0) = 1 \quad \text{für alle } x.$$

Umstellen der oberen Gleichung nach dem Skalarprodukt liefert uns dann unsere Aussage.

Fall 2: $m \neq n$

Analog hergeleitet wie oben gilt für $y_i(\mu_m)$ und $g_n(\mu_n)$ die Wronski-Identität:

$$[y_i, g_n]' = (\mu_m - \mu_n) y_i g_n \quad (i = 1, 2)$$

und damit

$$y_i g_n = \frac{1}{\mu_m - \mu_n} [y_i, g_n]'$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 2 \left\langle a_m, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n} \int_0^1 ([y_1, g_n]' [y_2, g_n] + [y_2, g_n]' [y_1, g_n]) dx \\ &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n} [[y_1, g_n] [y_2, g_n]]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei letzte Gleichheit aus den Dirichlet-Randbedingungen sowie den oben definierten Fundamentallösungen folgt.

Im Fall $x = 0$ gilt

$$[y_2, g_n] = y_2(0) g_n'(0) - y_2'(0) g_n(0) = 0$$

da $y_2(0) = g_n(0) = 0$. Daraus folgt unmittelbar, dass auch

$$[y_1, g_n] [y_2, g_n] = 0.$$

Im Fall $x = 1$ nutzen wir die Dirichlet-Randwerte $y_2(1, \mu_n) = 0$, da μ_n Eigenwert und $g_n(1) = 0$.

Damit folgt

$$[y_2, g_n] = y_2(1) g_n'(1) - y_2'(1) g_n(1) = 0$$

und demnach unmittelbar

$$[y_1, g_n] [y_2, g_n] = 0.$$

Teil C

Fall 1: $m = n$

$$\begin{aligned}
 \left\langle a_n, \frac{d}{dx} a_n \right\rangle &= \int_0^1 a_n a_n' dx \\
 &= \frac{1}{2} [a_n^2]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} (a_n^2(1) - a_n^2(0)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus $a_n(0) = a_n(1) = 0$ folgt.

Fall 2: $m \neq n$

Analog zu oben erhält man auch hier über partielle Intergration

$$\begin{aligned}
 \left\langle a_m, \frac{d}{dx} a_n \right\rangle &= \int_0^1 a_m a_n' dx \\
 &= [a_m a_n]_0^1 - \int_0^1 a_m' a_n dx \\
 &= - \int_0^1 a_m' a_n dx.
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 2 \left\langle a_m, \frac{d}{dx} a_n \right\rangle &= \int_0^1 (a_m a_n' - a_m' a_n) dx \\
 &= \int_0^1 [a_m, a_n] dx \\
 &= \int_0^1 \left(y_2(\mu_m) y_2(\mu_n) [y_1(\mu_m), y_1(\mu_n)] + y_1(\mu_m) y_1(\mu_n) [y_2(\mu_m), y_2(\mu_n)] \right) dx \\
 &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n} \int_0^1 [y_2(\mu_m) y_2(\mu_n)]' [y_1(\mu_m) y_1(\mu_n)] dx \\
 &\quad + \int_0^1 [y_1(\mu_m) y_1(\mu_n)]' [y_2(\mu_m) y_2(\mu_n)] dx \\
 &= \frac{1}{\mu_m - \mu_n} [[y_1(\mu_m), y_1(\mu_n)] [y_2(\mu_m), y_2(\mu_n)]]_0^1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit erhält man durch Einsetzen der Definition von

$$a_m(x) = y_1(x, \mu_m) y_2(x, \mu_n) \quad \text{und} \quad a_n(x) = y_1(x, \mu_n) y_2(x, \mu_m),$$

in

$$[a_m, a_n] = y_2(\mu_m) y_2(\mu_n) [y_1(\mu_n), y_1(\mu_m)] + y_1(\mu_m) y_1(\mu_n) [y_2(\mu_m), y_2(\mu_n)].$$

Dann folgt mit

$$[y_j(\mu_m), y_j(\mu_n)]' = (\mu_m - \mu_n) y_j(\mu_m) y_j(\mu_n) \quad (j = 1, 2)$$

die fünfte Gleichheit. Die sechste erhält man dann mit dem Hauptsatz.

Aus

$$[y_2(\mu_m), y_2(\mu_n)](0) = y_2(0, \mu_m) y_2'(0, \mu_n) - y_2'(0, \mu_m) y_2(0, \mu_n) = 0$$

sowie

$$[y_2(\mu_m), y_2(\mu_n)](1) = y_2(1, \mu_m) y_2'(1, \mu_n) - y_2'(1, \mu_m) y_2(1, \mu_n) = 0$$

folgt dann die letzte Gleichheit.

Abschließend sei angemerkt, dass der Ausdruck $\frac{1}{\mu_m - \mu_n}$ stets wohldefiniert ist, da er nur im Fall $m \neq n$ auftritt. **q.e.d.**

Theorem 8 formuliert Orthogonalitätsrelationen zwischen den Eigenfunktionen g_n des Dirichlet-Problems, welche insbesondere für Theorem 9 von zentraler Bedeutung sind.

Im Fall $q = 0$ lässt sich unser Eigenwertproblem explizit lösen.

Die Vektoren

$$g_n^2 - 1 = -\cos(2\pi nx), \quad \frac{d}{dx} g_n^2 = 2\pi n \sin(2\pi nx)$$

sowie die Konstante 1 bilden eine vollständige Fourier-Basis des Hilbertraums $L^2[0, 1]$. (Dies folgt aus dem Korollar 1)

Theorem 8 und die asymptotic estimates aus dem Korollar 1 lassen uns nun dieselbe Aussage für alle q beweisen. Das Theorem ist demnach das Bindeglied zwischen der klassischen Fourier-Orthogonalität und der allgemeinen Spektralstruktur des Dirichlet-Problems, ohne dem man nicht zeigen könnte, dass die abgeleiteten und quadrierten Eigenfunktionen sowie die Konstante 1 tatsächlich eine vollständige, orthogonale Basis in $L^2[0, 1]$ bilden.

Theorem 9

Sei $(g_n)_{n \geq 1}$ das normierte Eigenfunktionssystem des Dirichlet-Problems

$$-g_n'' + q(x)g_n + \mu_n g_n = 0, \quad g_n(0) = g_n(1) = 0.$$

Dann gilt

1. Die Funktionen

$$1, \quad g_n^2 - 1, \quad n \geq 1,$$

sind linear unabhängig.

2. Auch die Funktionen

$$\frac{d}{dx}g_n^2, \quad n \geq 1,$$

sind linear unabhängig.

3. Die beiden Folgen

$$\{g_n^2 - 1\}_{n \geq 1} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{d}{dx}g_n^2 \right\}_{n \geq 1}$$

sind **orthogonal**.

4. Zusammen bilden sie eine **orthogonale Basis** des Hilbertraums $L^2[0, 1]$.

Genauer: Die Abbildung

$$(\xi, \eta) \longmapsto \sum_{n \geq 1} \xi_n \frac{d}{dx}g_n^2 + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1)$$

definiert einen **linearen Isomorphismus** zwischen

$$\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2 \quad \text{und} \quad L^2[0, 1].$$

Aus Theorem 6 folgt, dass in $L^2[0, 1]$ an einem geraden Punkt die Vektoren

$$1, \quad g_n^2 - 1, \quad n \geq 1,$$

eine Basis des Unterraums der geraden Funktionen in L^2 bilden und die Vektoren

$$\frac{d}{dx}g_n^2, \quad n \geq 1,$$

eine Basis des Unterraums der ungeraden Funktionen bilden.

Beweis

1. Lineare Unabhängigkeit

Eine Folge von Vektoren $(v_n)_{n \geq 1}$ in einem Hilbertraum heißt **linear unabhängig**, wenn kein v_n in der abgeschlossenen linearen Hülle der übrigen v_m (mit $m \neq n$) liegt.

Annahme

$$g_n^2 - 1 \in \overline{\left\{ \mathbb{R} \cdot 1 + \sum_{m \neq n} \mathbb{R} \cdot (g_m^2 - 1) \right\}}$$

Beweis

Man wähle als Testvektor $\frac{d}{dx}a_n$.

Dann gilt

$$\langle 1, \frac{d}{dx}a_n \rangle = \int_0^1 1 \cdot a'_n dx = a_n(1) - a_n(0) = 0.$$

und

$$\begin{aligned} \langle g_m^2 - 1, \frac{d}{dx}a_n \rangle &= \langle g_m^2, \frac{d}{dx}a_n \rangle - \langle 1, \frac{d}{dx}a_n \rangle \\ &= \int_0^1 g_m^2 a'_n dx \\ &= \left[g_m^2 a_n \right]_0^1 - \int_0^1 (g_m^2)' a_n dx \\ &= - \int_0^1 a_n (g_m^2)' dx \\ &= - \langle a_n, \frac{d}{dx}g_m^2 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit aus der Linearität des Skalarprodukts, die dritte aus partieller Integration und die letzte aus Theorem 8 (b) folgt.

Damit $g_n^2 - 1$ tatsächlich wie angenommen in der linearen abgeschlossenen Hülle der anderen Vektoren liegt, muss $g_n^2 - 1$ ebenfalls orthogonal zu $\frac{d}{dx}a_n$ sein.

Aber

$$\begin{aligned}\langle g_n^2 - 1, \frac{d}{dx} a_n \rangle &= \langle g_n^2, \frac{d}{dx} a_n \rangle - \langle 1, \frac{d}{dx} a_n \rangle \\ &= - \langle a_n, \frac{d}{dx} g_n^2 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

Auch hier folgt die letzte Gleichheit aus Theorem 8 (b). Die Annahme wurde demnach zum Widerspruch geführt. $g_n^2 - 1$ liegt nicht in der abgeschlossenen linearen Hülle der übrigen Vektoren und die lineare Unabhängigkeit wurde gezeigt.

Annahme

$$\frac{d}{dx} g_n^2 \in \overline{\left\{ \sum_{m \neq n} \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dx} g_m^2 \right\}}$$

Beweis

Nach Theorem 8(b) gilt

$$\langle a_n, \frac{d}{dx} g_m^2 \rangle = 0 \quad \text{für } m \neq n.$$

Das heißt a_n ist orthogonal zu allen $\frac{d}{dx} g_m^2$ mit $m \neq n$.

Damit auch $\frac{d}{dx} g_n^2$ in der linearen abgeschlossenen Hülle liegt, muss $\frac{d}{dx} g_n^2$ orthogonal zu a_n sein.

Aber

$$\left\langle \frac{d}{dx} g_n^2, a_n \right\rangle = \left\langle a_n, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Die letzte Gleichheit folgt wieder aus Theorem 8(b) für $m = n$. Damit entsteht erneut ein Widerspruch und die lineare Unabhängigkeit wurde gezeigt.

2. Orthogonalität

Die Orthogonalität von

$$\{g_n^2 - 1\}_{n \geq 1} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{d}{dx} g_n^2 \right\}_{n \geq 1}$$

folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned}
\left\langle g_m^2 - 1, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle &= \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle - \left\langle 1, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle \\
&= \left\langle g_m^2, \frac{d}{dx} g_n^2 \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

wobei auch hier die letzte Gleichheit aus Theorem 8 (a) folgt.

3. Basis

Zu zeigen ist jetzt, dass

$$\{ 1, g_n^2 - 1, \frac{d}{dx} g_n^2 \mid n \geq 1 \}$$

eine vollständige Basis des Hilbertraums $L^2[0, 1]$ bildet.

Die Argumentation stützt sich an dieser Stelle auf die Asymptotik aus Korollar 1. Da die Funktionen g_n als kleine Störungen mit quadratsummierbaren Störtermen auftreten, sind die Voraussetzungen von Theorem D3 erfüllt und dessen Anwendung ist gerechtfertigt.

Theorem D3

Sei $(e_n)_{n \geq 1}$ eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums H .

Man betrachte eine weitere Folge $(d_n)_{n \geq 1}$ von Vektoren in H , die entweder H aufspannt oder linear unabhängig ist.

Gilt zusätzlich

$$\sum_{n \geq 1} \|d_n - e_n\|^2 < \infty,$$

so bildet auch die Folge $(d_n)_{n \geq 1}$ eine Basis von H .

Darüber hinaus ist die Abbildung

$$x \mapsto (\langle x, d_n \rangle)_{n \geq 1}$$

ein linearer Isomorphismus zwischen H und ℓ^2 .

Demnach folgen wir unmittelbar aus Theorem D3, dass die Vektoren 1 , $g_n^2 - 1$ und $\frac{d}{dx}g_n^2$ eine Basis des Hilbertraums L^2 bilden.

Im letzten Schritt zeigt man nun, dass die Abbildung

$$T : \ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2 \longrightarrow L^2([0, 1])$$

$$T(\xi, \eta) = \sum_{n \geq 1} \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1).$$

tatsächlich einen linearen Isomorphismus zwischen $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$ und L^2 definiert.

Wahl der Koeffizientenräume

Die Ableitungen der Eigenfunktionen erfüllen asymptotisch (wegen $g_n \sim \sin(n\pi x)$)

$$\left\| \frac{d}{dx} g_n^2 \right\|_{L^2} \sim n,$$

sodass für die ungeraden Komponenten gilt

$$\left\| \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 \right\|_{L^2}^2 \approx (2\pi n)^2 |\xi_n|^2.$$

Damit die Reihe in der L^2 -Norm konvergiert, muss gelten

$$\sum_{n \geq 1} (2\pi n)^2 |\xi_n|^2 < \infty.$$

Daher gilt

$$\xi \in \ell_1^2 = \left\{ (a_n) : \sum_{n \geq 1} (2\pi n)^2 |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Für die Koeffizienten der *geraden* Basisfunktionen $g_n^2 - 1$ gilt

$$\eta \in \ell^2 = \left\{ (a_n) : \sum_{n \geq 1} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

und $\eta_0 \in \mathbb{R}$ als Koeffizient der konstanten Funktion 1 .

Damit wird genau die Norm definiert, die das Wachstum der Basis kompensiert und später die Isometrie sicherstellt.

1. Linearität

Seien (ξ, η) und (ξ', η') Elemente aus $\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 T(\alpha(\xi, \eta) + \beta(\xi', \eta')) &= T(\alpha\xi + \beta\xi', \alpha\eta + \beta\eta') \\
 &= \sum_{n \geq 1} (\alpha\xi_n + \beta\xi'_n) \frac{d}{dx} g_n^2 + (\alpha\eta_0 + \beta\eta'_0) + \sum_{n \geq 1} (\alpha\eta_n + \beta\eta'_n)(g_n^2 - 1) \\
 &= \alpha \left(\sum_{n \geq 1} \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1) \right) \\
 &\quad + \beta \left(\sum_{n \geq 1} \xi'_n \frac{d}{dx} g_n^2 + \eta'_0 + \sum_{n \geq 1} \eta'_n (g_n^2 - 1) \right) \\
 &= \alpha T(\xi, \eta) + \beta T(\xi', \eta').
 \end{aligned}$$

2. Bijektivität

Injektivität

Angenommen

$$T(\xi, \eta_0, \eta) = 0.$$

Dann gilt

$$\sum_{n \geq 1} \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1) = 0.$$

Die drei Basissysteme

$$\left\{ \frac{d}{dx} g_n^2 \right\}, \quad \{1\}, \quad \{g_n^2 - 1\}$$

sind im L^2 -Raum linear unabhängig.

Also folgt

$$\xi_n = 0, \quad \eta_0 = 0, \quad \eta_n = 0.$$

Somit ist T injektiv.

Surjektivität

Die Surjektivität der Abbildung T beruht wesentlich darauf, dass der Zielraum $L^2([0, 1])$ vollständig von der Basis

$$\left\{ 1, g_n^2 - 1, \frac{d}{dx} g_n^2 \mid n \geq 1 \right\}$$

aufgespannt wird. Das bedeutet, dass der Abschluss der linearen Hülle dieser Funktionen gerade der gesamte Raum $L^2([0, 1])$ ist. Damit gilt unmittelbar, dass das Bild der Abbildung T genau $L^2([0, 1])$ sein muss.

Anschaulich bedeutet dies Folgendes: Die Abbildung T ordnet jeder möglichen Wahl von Koeffizientenfolgen (ξ_n) , (η_n) sowie der Konstante η_0 eine Funktion in L^2 zu, indem diese Koeffizienten die oben genannten Basisfunktionen multiplizieren. Da diese Basis vollständig ist, kann jede L^2 -Funktion f durch eine solche Linearkombination dargestellt werden.

Somit erreicht T durch geeignete Wahl der Koeffizienten tatsächlich jede Funktion $f \in L^2([0, 1])$. Es folgt daher, dass das Bild von T der gesamte Raum $L^2([0, 1])$ ist, und damit, dass T surjektiv ist.

Aus der Injektivität und Surjektivität von T folgt die Bijektivität.

3. Isometrie

Die Norm im Produktraum ist definiert als

$$\|(\xi, \eta_0, \eta)\|^2 = \sum_{n \geq 1} (2\pi n)^2 |\xi_n|^2 + |\eta_0|^2 + \sum_{n \geq 1} |\eta_n|^2.$$

Für die Basisvektoren gilt definitionsgemäß

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle_{L^2} = \langle e_i, e_j \rangle_{\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2}.$$

Durch Linearität des Skalarproduktes folgt für alle (ξ, η) , (ξ', η') :

$$\langle T(\xi, \eta), T(\xi', \eta') \rangle_{L^2} = \langle (\xi, \eta), (\xi', \eta') \rangle_{\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2}.$$

Insbesondere

$$\|T(\xi, \eta_0, \eta)\|_{L^2} = \|(\xi, \eta_0, \eta)\|_{\ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2}.$$

Die Wahl des Gewichtes $(2\pi n)^2$ in der Norm von ℓ_1^2 kompensiert genau das Wachstum

$$\left\| \frac{d}{dx} g_n^2 \right\|_{L^2} \sim n,$$

sodass die Längenstrukturen beider Räume übereinstimmen.

Damit ist T isometrisch.

Da T linear, bijektiv und isometrisch ist, folgt, dass

$$T : \ell_1^2 \times \mathbb{R} \times \ell^2 \longrightarrow L^2([0, 1])$$

ein linearer Isomorphismus ist.

Jede Funktion $f \in L^2([0, 1])$ lässt sich somit eindeutig durch die Koeffizienten (ξ, η_0, η) darstellen. **q.e.d.**

Korollar 3

Für alle $q \in L^2[0, 1]$ sind

$$U = \left\{ \sum_{n \geq 1} \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 : \xi \in \ell_1^2 \right\} \quad \text{und} \quad V = \left\{ \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1) : \eta \in \mathbb{R} \times \ell^2 \right\}.$$

Dann sind U und V **Unterräume** von $L^2[0, 1]$. Es gilt:

1. U und V sind **orthogonal**,
2. U und V sind **abgeschlossen** in $L^2[0, 1]$,
3. $L^2[0, 1] = U \oplus V$,
4. Falls q eine **gerade Funktion** ist, sind U und V genau die **ungeraden** bzw. **geraden** Teilräume von $L^2[0, 1]$.

Beweis

1. Orthogonalität

Die Orthogonalität folgt unmittelbar aus Theorem 8.

2. Abgeschlossenheit

$$T(\xi, \eta) = \sum_{n \geq 1} \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 + \eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1)$$

Nach Theorem 9 ist T ein linearer Isomorphismus.
Demnach sind U und V abgeschlossen in $L^2[0, 1]$.

3. Direkte Summe

T ist bijektiv, das heißt jede Funktion $f \in L^2[0, 1]$ lässt sich eindeutig in die beiden Komponenten

$$\sum_{n \geq 1} \xi_n \frac{d}{dx} g_n^2 + \left(\eta_0 + \sum_{n \geq 1} \eta_n (g_n^2 - 1) \right) = f$$

zerlegen. Demnach ist $L^2[0, 1]$ die direkte Summe aus U und V .

4. Spezialfall: q gerade

Mit Theorem 6(b) gilt

$$g_n(1 - x) = (-1)^n g_n(x).$$

g_n^2 ist gerade, denn

$$g_n^2(1 - x) = (g_n(1 - x))^2 = ((-1)^n g_n(x))^2 = g_n^2(x).$$

$\frac{d}{dx} g_n^2$ ist ungerade, denn

$$\frac{d}{dx} g_n^2(1 - x) = 2 g_n(1 - x) g'_n(1 - x) = 2(-1)^{2n+1} g_n(x) g'_n(x) = -\frac{d}{dx} g_n^2(x).$$

Daher erzeugt

$$U = \left\{ \mathbb{R} \cdot 1 + \sum_{n \geq 1} \mathbb{R} \cdot (g_n^2 - 1) \right\} \quad \text{alle geraden Funktionen,}$$

und

$$V = \left\{ \sum_{n \geq 1} \mathbb{R} \cdot \frac{d}{dx} g_n^2 \right\} \quad \text{alle ungeraden Funktionen.} \quad \mathbf{q.e.d}$$

Abschluss

Anwendungsbereich des Dirichlet Problems

Das Dirichlet-Problem gehört zu den grundlegendsten Fragestellungen der mathematischen Physik und der Analysis. Sein Aufbau ist zwar einfach formuliert, doch die dahinterstehende Theorie hat weitreichende Konsequenzen. In vielen physikalischen Modellen treten Situationen auf, in denen ein System durch eine Differentialgleichung beschrieben wird, während bestimmte Randwerte vorgegeben sind. Genau in solchen Fällen liefert das Dirichlet-Problem den passenden theoretischen Rahmen.

Ein klassisches Beispiel findet sich in der Quantenmechanik. Dort beschreibt eine Funktion $y(x)$ den Zustand eines Teilchens, und der Parameter λ lässt sich als die Energie dieses Zustands interpretieren. Ähnliche Strukturen treten in der Wärmeleitung auf, wo Temperaturverteilungen modelliert werden, oder in der Mechanik schwingender Saiten, bei denen $y(x)$ den Ausschlag und λ die Frequenz einer Schwingungsform angibt. In all diesen Anwendungen sind die Lösungen des Dirichlet-Problems eng mit physikalisch beobachtbaren Größen verknüpft.

Über seine praktischen Anwendungen hinaus besitzt das Dirichlet-Problem eine hohe theoretische Bedeutung. Die Analyse seiner Eigenfunktionen und Eigenwerte führt zu einem grundlegenden Verständnis der Spektralstruktur von Differentialoperatoren. Gerade diese spektrale Sichtweise zeigt, wie verschiedene Teilgebiete der Mathematik zusammenwirken: Methoden der Analysis verbinden sich mit Strukturen der linearen Algebra und den Konzepten der Funktionalanalysis. Durch diese Verzahnung entsteht ein umfassendes Bild der Eigenschaften von Differentialoperatoren und deren Lösungen.

Damit ist das Dirichlet-Problem nicht nur ein wichtiges physikalisches Modell, sondern auch ein zentrales Bindeglied für das Verständnis der mathematischen Grundlagen, die in vielen modernen Anwendungen unverzichtbar sind.