

•
•



Seminar Thesis

Das Dirichletproblem II

Name: Steven Haaß

Supervisor: Prof.Dr.Schmidt

14.11.2025

Theorem 1

Das Dirichlet-Spektrum von q in L_R^2 ist eine unendliche Folge reeller Zahlen, die nach unten beschränkt ist und gegen $+\infty$ konvergiert.

Beweis:

Wir müssen lediglich zeigen, dass die Dirichleteigenwerte reell sind. Den Rest können wir mit dem Counting Lemma schlussfolgern. Um das Theorem zu zeigen, nehmen wir an, dass λ ein Eigenwert des Dirichlet-Spektrums ist, das wir hier q genannt haben. Dazu gibt es eine Eigenfunktion bezeichnet mit $y(x)$. Dann gilt für die zweite Ableitung $-y'' + q(x)y = \lambda y$. Wir wenden im folgenden Schritt nun die komplexe Konjugation auf beiden Seiten der Gleichung an. Dies führt zu

$-\bar{y}'' + q(x)\bar{y} = \bar{\lambda}\bar{y}$ für $q \in R$. Im nächsten Schritt sehen wir, dass wir zwei Gleichungen erhalten. Für die Integration später, bilden wir die Differenz der beiden Gleichungen die wir erhalten und stellen den Wronskian Koeffizienten auf. Damit wir das tun können, multiplizieren wir erstmal die Gleichung

$-y'' + q(x)y = \lambda y$ mit $\bar{y}$. Dadurch erhalten wir $-y''\bar{y} + q(x)y\bar{y} = \lambda y\bar{y}$. Analog führen wir eine ähnliche Rechnung für die zweite Gleichung durch. Diesmal multiplizieren wir die Gleichung mit y . Nun sieht die zweite Gleichung wie folgt aus: $-\bar{y}''y + q(x)\bar{y}y = \bar{\lambda}\bar{y}y$. Bilden wir die Differenz aus den beiden Gleichungen, so ergibt das auf der linken Seite

$-y''\bar{y} + q(x)y\bar{y} - (-\bar{y}''y + q(x)\bar{y}y) = -y''\bar{y} + q(x)y\bar{y} + \bar{y}''y - q(x)\bar{y}y = -y''\bar{y} + \bar{y}''y$. Und für die rechte Seite der Gleichung gilt dann $\lambda y\bar{y} - \bar{\lambda}\bar{y}y = (\lambda - \bar{\lambda})|y|^2$.

Insgesamt erhalten wir die Gleichung $\bar{y}''y - y''\bar{y} = (\lambda - \bar{\lambda})|y|^2$. Mit dem Wronskian folgt dann $[y, \bar{y}]' = (\lambda - \bar{\lambda})|y|^2$. Integrieren ergibt dann

$[y, \bar{y}]'_0^1 = \int_0^1 (\lambda - \bar{\lambda})|y|^2 dt = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 |y|^2 dt \Leftrightarrow 0 = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 |y|^2 dt$. Die rechte Seite verschwindet und rechts bleibt die Differenz des reellen Eigenwerts und dem komplexen Eigenwert. Also muss $\lambda = \bar{\lambda}$. $\Rightarrow$ alle Eigenwerte müssen reell sein. $\square$.

Dies ist ein Standardargument, um zu zeigen, dass wir keine komplexen Eigenwerte haben, sondern nur reelle Eigenwerte. Dies zeigt, dass jede beliebige Eigenfunktion mit Eigenwerten λ ein Vielfaches von der Funktion $y_2(x, \lambda)$ ist. Die geometrische Multiplikation von Eigenwerten λ ist nur die linear Unabhängige Multiplikation von Eigenfunktionen, die zu dem Eigenwert λ gehören. Insgesamt ist sie gleich 1. Eine weitere Art dieses geometrische Problem zu betrachten ist, die Wurzel aus $y_2(1, \lambda)$. Weil wir eine ganze Reihe an solchen Wurzeln haben, wird diese stets größer. Aber wie wir in diesem Beweis gesehen haben, kann dieser Fall nie eintreten. Häufig verwenden wir die Notation $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ also die Ableitung nach dem Parameter λ .

Theorem 2

Sei λ ein Dirichleteigenwert von q in L^2 . Dann gilt $\dot{y}_2(1, \lambda)y_2'(1, \lambda) = \int_0^1 y_2(t, \lambda)dt = \|y_2(\cdot; \lambda)\|^2 > 0$

Beweis:

Sei $y_2 = y_2(x, \lambda)$. Durch Differenzieren der Gleichung erhalten wir

$$-\dot{y}_2'' + q(x)\dot{y}_2 = y_2 + \lambda \dot{y}_2.$$

Da wir in Bezug auf λ differenzieren, und unter der Annahme, dass q stetig ist, entstehen beim Vertauschen der x - und λ -Koordinaten keine Probleme. Wir multiplizieren nun diese Differentialgleichung auf beiden Seiten mit y_2 . Die ursprüngliche Differentialgleichung des Ausgangsproblems multiplizieren wir mit

$\dot{y}_2$. Im nächsten Schritt bilden wir die Differenz der beiden resultierenden Gleichungen.

Für die erste Gleichung gilt:

$$-\dot{y}_2'' y_2 + q(x) \dot{y}_2 y_2 = y_2^2 + \lambda \dot{y}_2 y_2.$$

Multiplizieren wir nun die abgeleitete Gleichung mit $\dot{y}_2$, so erhalten wir:

$$-y_2'' \dot{y}_2 + q(x) \dot{y}_2 y_2 = \lambda \dot{y}_2 y_2.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$-\dot{y}_2'' y_2 + q(x) \dot{y}_2 y_2 - (-y_2'' \dot{y}_2 + q(x) \dot{y}_2 y_2) = y_2^2 + \lambda \dot{y}_2 y_2 - \lambda \dot{y}_2 y_2.$$

Dies vereinfacht sich zu

$$-\dot{y}_2'' y_2 + y_2'' \dot{y}_2 = y_2^2 - y_2 \dot{y}_2.$$

Nun betrachten wir die ****Wronski-Determinante****, die genau dieser Differenz entspricht. Wir definieren:

$$[\dot{y}_2, y_2] = \begin{vmatrix} \dot{y}_2 & y_2' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \dot{y}_2 y_2' - y_2 \dot{y}_2'.$$

Durch Differenzieren folgt:

$$[\dot{y}_2, y_2]' = \dot{y}_2' y_2' + \dot{y}_2 y_2'' - y_2' \dot{y}_2' - y_2 \dot{y}_2'' = \dot{y}_2 y_2'' - y_2 \dot{y}_2''.$$

Integrieren wir nun über das Intervall $[0, 1]$, so ergibt sich:

$$\int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt = \int_0^1 [\dot{y}_2, y_2]' dt$$

und somit

$$\int_0^1 y_2^2(t, \lambda) dt = [\dot{y}_2, y_2] \Big|_0^1 = \dot{y}_2(1, \lambda) y_2'(1, \lambda).$$

- Für das Anfangswertproblem gilt $y_2(0, \lambda) = 0$ und $\dot{y}_2(0, \lambda) = 0$ für alle λ .

Zudem verschwindet $y_2(1, \lambda)$ für alle Dirichlet-Eigenwerte.

Daraus folgt, dass das Integral gleich der Norm

$$\|y_2(\cdot, \lambda)\|^2$$

ist, und y_2 reell ist für reellwertige λ .

Theorem 1.6

Für Indizes $j=1,2$ gilt

$$(i) \quad \frac{\partial y_j}{\partial q(t)}(x) = y_j(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$$

$$\frac{\partial y_j'}{\partial q(t)}(x) = y_j(t)[y_1(t)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(t)]\mathbb{1}_{[0,x]}(t)$$

Der Gradient ist unter Berücksichtigung von x, λ und stetig

$$(ii) \quad \frac{y_j}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y_j}{\partial q(t)} dt$$

$$\frac{y_j'}{\partial \lambda} = - \int_0^1 \frac{\partial y_j'}{\partial q(t)} dt$$

Beweis:

(i) Wenn wir annehmen, dass q stetig ist, dann muss y_j zweimal stetig differenzierbar sein in x . Wir dürfen die Variablen, nach denen wir differenzieren, vertauschen, müssen aber auf x und q achten, wenn wir die partiellen Ableitungen vertauschen. Dann gilt

$$d_q y_j''(v) = d_q y_j''(v) = (d_q y_j(v))''.$$

Nehmen wir uns nun zwei in q analytische Funktionen y_1 und y_2 . Außerdem sind y_1 und y_2 stetig differenzierbar in q . Dann gilt für eine Abbildung $f : E \rightarrow F$, wobei E und F Banachräume sind, das mit dem Theorem von Riesz die partielle Ableitung existiert und eindeutig ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Wenn für den Banachraum E gilt, dass $E = L^2_{\mathbb{C}}$ und $f : q \rightarrow y_j(q)(x)$ gilt, insbesondere $F = \mathbb{C}$. Für die lineare Abbildung in Abhängigkeit von v gilt

$$d_x f(v) = \langle v, \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} \rangle \quad \forall v \in E.$$

Dieses v ist dann der Gradient von f ausgewertet an der Stelle x . Nun betrachten wir die Differentialgleichung

$$-y_j'' + q(x)y_j = \lambda y_j.$$

Nachdem wir die Richtungsableitung dieser Differentialgleichung in Richtung v in L^2_C bilden, erhalten wir

$$d_q y_j(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} y_j(q + tv).$$

Angewandt auf die Differentialgleichung ergibt das

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (-y_j''(q + tv)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (q + tv)y_j(q + tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\lambda y_j(q + tv)).$$

Dies führt zu

$$d_q y_j''(q)(v) + v y_j(q) + q d_q y_j(q)(v) = \lambda d_q y_j(q)(v)$$

$$\Leftrightarrow d_q y_j''(q)(v) + q d_q y_j(q)(v) = \lambda d_q y_j(q)(v) - v y_j(q)$$

Wir dürfen die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen. Wir müssen dafür nur die Reihenfolge von x und q ebenfalls vertauschen. Für den ersten Term gilt:

$$-d_q y_j''(v) = (-d_q y_j(v))'' = -(d_q y_j(v))''. \text{ Aber: Die Anfangswerte verschwinden für beide Argumente und sind somit unabhängig von } q.$$

Mit Theorem 2 folgt:

$$d_q y_j(q)(v) = \int_0^x y_j(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]v(t)dt,$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial y_j}{\partial q(t)} = y_j(t)[y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)]\mathbb{1}_{[0,x]}(t).$$

Theorem 3

μ_n sind eine Funktion mit Indizes $n \geq 1$. Diese ist kompakt reellanalytisch in L^2 . Dann gilt für den Gradienten $\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = g_n^2(t, q)$. Da μ_n eine reellanalytische Funktion ist, ist auch g_n eine reellanalytische Funktion im Argument q . Wir beziehen uns dabei auf den gerade eingeführten Ausdruck und das erste Kapitel.

Beweis:

Der Gradient ist $0 = \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \mu_n(q), q) = \dot{y}_2(1, \mu_n) \frac{\partial \mu_n}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \mu_n)$. Mit $\lambda = \mu_n$ im zweiten Term gilt dann für den Gradienten, dass dieser gleich $\dot{y}_2(1, \mu_n) \frac{\partial \mu_n}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} y_2(1, \lambda)$.

Mit Theorem 1.6 folgt nun die Äquivalenz zu

$$y_2(t)[y_1(t)y_2(1) - y_1(1)y_2(t)] = y_2(t)y_1(t)y_2(1) - y_2(t)y_1(1)y_2(t) = -y_1(1)y_2(t)^2.$$

Gemäß dem Anfangswertproblem gilt $y_1(1) = 0$ und somit erhalten wir diese

Gleichheit. Außerdem gilt $-y_1(1)y_2(t)^2 = -\frac{y_2(t)^2}{y_2'(1)}$. Mit $y_2(1, \mu_n) = 0$ und

$y_1(1)y_2'(1) = 1$ folgt mit dem Wronskian, dass $\frac{\partial \mu_n}{\partial q(t)} = \frac{y_2^2(t, \mu_n)}{\dot{y}_2(1, \mu_n)y_2'(1, \mu_n)} = g_n^2(t, q) \quad \square$.