Inverse Spektraltheorie

Fundamentallösungen und ihre Konstruktion in der Inversen Spektraltheorie

Thema A

Felix Haas, B.Sc.

Seminar zu ausgewählten Themen partieller und gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Professor Dr. Martin Schmidt

UNIVERSITÄT MANNHEIM
Fakultät für Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik

September 2025

HWS 2025/2026

Institut für Mathematik
Universität Mannheim

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen

In dieser Seminararbeit wird sowohl ein Lemma als auch ein Satz zur Fundamentallösung einer inhomogenen Differentialgleichung vorgestellt, die aus dem Werk "Inverse Spectral Theory" von Jürgen Pöschel und Eugene Trubowitz (1987) stammen.
Lemma 2.1 liefert dabei eine explizite Darstellung der Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems und ist damit das zentrale Werkzeug, um die späteren formalen Potenzreihen-Konstruktionen durchführen zu können. Satz 4.1 zeigt anschließend, dass diese formalen Reihen tatsächlich konvergieren und eindeutig die fundamentalen Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung liefern, sodass alle Lösungen vollständig beschrieben werden können.

Wir betrachten dazu folgende Gleichung:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

Hierbei ist $q \in L^2_{\mathbb{C}} = L^2_{\mathbb{C}}[0,1]$ und $q(x)$ damit eine komplexwertige quadratintegrierbare Funktion. $L^2_{\mathbb{C}}$ bezeichnet dabei den Hilbertraum.

Definition 1.1. *Der Raum $L^2[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty\}$ ist ein vollständiger Vektorraum mit einem inneren Produkt und heißt deshalb Hilbertraum. Das innere Produkt ist gegeben durch $< f, g >= \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$, $f, g \in L^2[0,1]$. Die induzierte Norm ist $\|f\| = \sqrt{< f, f >} = (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$.*

Ferner verwenden wir im Beweis und im Folgenden des öfteren den Begriff der absoluten Stetigkeit. Darunter versteht man:

Definition 1.2. *Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ heißt absolut stetig, wenn für f fast überall ein Ableitung $f'(t)$ existiert, die integrierbar ist ($f' \in L^1([0,1])$). Außerdem gilt $\forall x \in [0,1]$, dass $f(x) = f(0) + \int_0^x u'(t)dt$.*

Man möchte Lösungen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ zu der Gleichung (1) finden mit den Anfangsbedingungen:

$$y_1(0, \lambda, q) = y_2'(0, \lambda, q) = 1,$$
$$y_1'(0, \lambda, q) = y_2(0, \lambda, q) = 0.$$

Wie bereits angedeutet, ist das Ziel dieser Ausarbeitung zu zeigen, dass $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ ein Fundamentalsystem bilden. Das heißt, jede andere Lösung der Gleichung (1) kann als Linearkombination dieser beiden Lösungen dargestellt werden:

$$y(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x).$$

Motivation und Lösungsbegriff

Bevor wir zur expliziten Konstruktion der Fundamentallösungen übergehen, soll zunächst die zugrunde liegende Idee motiviert werden. Ziel ist es, das Anfangswertproblem zur Differentialgleichung (1) zu lösen. Die dabei konstruierten Funktionen $y_1(x, \lambda, q)$ und $y_2(x, \lambda, q)$ bilden ein Fundamentalsystem, sodass jede andere Lösung durch eine Linearkombination dieser beiden dargestellt werden kann. Damit erhält man eine vollständige Beschreibung des Lösungsraums. Dieser Zugang ist auch für die Behandlung von Randwertproblemen zentral, da sich diese auf geeignete Anfangswertprobleme zurückführen lassen.
Da $q \in L^2[0, 1]$ gilt, ist die Differentialgleichung (1) streng genommen nur fast überall definiert. Daher präzisieren wir den Begriff einer Lösung:

Definition 1.3. *Eine Funktion $y : [0, 1] \to \mathbb{C}$ heißt Lösung der Gleichung (1), wenn y stetig differenzierbar ist, y' absolut stetig ist und die Differentialgleichung $-y''+q(x)y = \lambda y$ fast überall erfüllt ist.*

Zur Motivation wird im Buch zunächst der Spezialfall $q = 0$ betrachtet. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung auf

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = 1, \; u'(0) = 0.$$

Die Lösung $u(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ kann durch eine Entwicklung in eine Potenzreihe in λ dargestellt werden. Dieses Vorgehen legt nahe, auch im allgemeinen Fall $q \neq 0$ mit Potenzreihenentwicklungen zu arbeiten. Um dies rigoros zu rechtfertigen, benötigen wir jedoch zunächst eine Darstellung der Lösung des inhomogenen Problems, die im folgenden Lemma formuliert wird.

2 Lösung des inhomogenen Problems

Zur Vorbereitung auf Satz 4.1 wird zunächst folgendes Lemma gezeigt.

Lemma 2.1. *Sei $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in \mathbb{C}$. Die eindeutige Lösung von*

$$-y'' = \lambda y - f(x), \qquad 0 \leq x \leq 1$$

zu den Anfangswerten

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b$$

ist gegeben durch

$$y(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} f(t)dt.$$

Wir verwenden folgende Abkürzung

$$c_\lambda(x) = \cos(\sqrt{\lambda}x), \qquad s_\lambda(x) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Dann lautet die Lösung

$$y(x) = ac_\lambda(x) + bs_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)f(t)dt.$$

Beweis: Wir betrachten das Integral $y_f(x) = \int_0^x s_\lambda(x-t)f(t)dt$. Durch Anwendung des Additionstheorems für Sinusfunktionen folgt

$$y_f(x) = s_\lambda(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)dt - c_\lambda(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)dt.$$

Da $c_\lambda f$ und $s_\lambda f$ integrierbar ist, ist y_f absolut stetig. Deshalb gilt fast überall

$$\begin{aligned}
y_f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(s_\lambda(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt - c_\lambda(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt\right) \\
&= s_\lambda'(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt + s_\lambda(x)\,c_\lambda(x)f(x) \\
&\quad - c_\lambda'(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt - c_\lambda(x)\,s_\lambda(x)f(x) \\
&= s_\lambda'(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt - c_\lambda'(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt \\
&\quad + \big(s_\lambda(x)c_\lambda(x)f(x) - c_\lambda(x)s_\lambda(x)f(x)\big) \\
&= s_\lambda'(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt - c_\lambda'(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt \\
&= c_\lambda(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt + \lambda s_\lambda(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Gleichung stetig ist in x, gilt es außerdem überall. Die zweite Ableitung liefert:

$$
\begin{aligned}
y_f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(c_\lambda(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt + \lambda s_\lambda(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt\right) \\
&= c_\lambda'(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt + c_\lambda(x)\underbrace{\frac{d}{dx}\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt}_{=c_\lambda(x)f(x)} \\
&\quad + \lambda s_\lambda'(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt + \lambda s_\lambda(x)\underbrace{\frac{d}{dx}\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt}_{=s_\lambda(x)f(x)} \\
&= c_\lambda'(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt + c_\lambda(x)^2 f(x) + \lambda s_\lambda'(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt + \lambda s_\lambda(x)^2 f(x) \\
&= \big(c_\lambda(x)^2 + \lambda s_\lambda(x)^2\big)f(x) \\
&\quad + \left(-\lambda s_\lambda(x)\int_0^x c_\lambda(t)f(t)\,dt + \lambda c_\lambda(x)\int_0^x s_\lambda(t)f(t)\,dt\right) \quad (\text{da } c_\lambda' = -\lambda s_\lambda,\ s_\lambda' = c_\lambda) \\
&= f(x) + \lambda\int_0^x \big[-s_\lambda(x)c_\lambda(t) + c_\lambda(x)s_\lambda(t)\big]\,f(t)\,dt \\
&= f(x) + \lambda\int_0^x s_\lambda(t-x)\,f(t)\,dt \qquad (\text{Additionstheorem}) \\
&= f(x) - \lambda\int_0^x s_\lambda(x-t)\,f(t)\,dt \qquad (\text{da } s_\lambda \text{ ungerade ist}) \\
&= f(x) - \lambda\, y_f(x).
\end{aligned}
$$

Damit folgt unmittelbar, dass y_f eine Lösung von $-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 \le x \le 1$ mit den Anfangswerten $y_f(0) = 0,\ y_f'(0) = 0$ ist.

Da c_λ und s_λ die homogene Gleichung, also wenn $a = b = 0$ ist, lösen, ist $y(x) = ac_\lambda(x) + bs_\lambda(x) + y_f(x)$ eine Lösung von $-y'' = \lambda y - f(x)$ zu den Anfangswerten $y(0) = a,\ y'(0) = b$.
Um schließlich die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, $\tilde{y}$ sei eine andere Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit den gleichen Anfangswerten. Dann erfüllt die Differenz $v = y - \tilde{y}$ die Differentialgleichung

$$-v'' = \lambda v, \qquad v(0) = 0, \qquad v'(0) = 0.$$

Damit folgt, dass v verschwindet, also die Funktion $v(x) = 0$ für alle x, also gilt $y = \tilde{y}$.
q.e.d.

3 Konstruktion der Lösungen

Jetzt sind wir in der Lage, die beiden Fundamentallösungen y_1 und y_2 zu konstruieren. Im Folgenden wird exemplarisch die Konstruktion von $y_1(x, \lambda, q)$ dargestellt, diejenige von y_2 verläuft analog. Dazu entwickeln wir y_1 als Potenzreihe in q.
Wir nehmen an, dass wir

$$y_1(x, \lambda, q) = C_0(x, \lambda) + \sum_{n \geq 1} C_n(x, \lambda, q)$$

schreiben können mit

$$C_n(x, \lambda, q) = C_n(x, \lambda, q_1, \ldots, q_n)\Big|_{q_1 = \ldots = q_n = q}.$$

Dabei ist $C_n(x, \lambda, q_1, \ldots, q_n)$ eine beschränkte, multilineare symmetrische Form auf $L^2_{\mathbb{C}} \times \ldots \times L^2_{\mathbb{C}}$ $((L^2_{\mathbb{C}})^n)$, also für jedes x und λ. Folglich ist C_1 lineare in q, C_2 quadratisch in q und so weiter.
Der Term nullter Ordnung ergibt sich, wie bei der Taylorentwicklung, durch $q = 0$. Das ergibt $C_0(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x)$. Wie zuvor differenzieren wir die Potenzreihe für y_1 zwei mal nach x, benutzen die Differentialgleichung und vergleichen die Terme, die homogen vom gleichen Grad in q sind. Wir erhalten dadurch für alle C_n

$$-C_n'' = \lambda C_n - qC_{n-1}, \qquad n \geq 1.$$

Die Anfangswerte ergeben sich, da $y_1(0) = 1 + \sum_{n \geq 1} C_n(0) = 1$ und $y_1'(0) = \sum_{n \geq 1} C_n'(0) = 0$ ist für alle q als

$$C_n(0, \lambda, q) = 0, \qquad\qquad C_n'(0, \lambda, q) = 0, \qquad\qquad n \geq 1.$$

Nach Lemma 2.1 folgt dann

$$C_n(x, \lambda, q) = \int_0^x s_\lambda(x - t) q(t) C_{n-1}(t, \lambda, q) dt \qquad n \geq 1.$$

Wir bestimmen jetzt durch Berechnung C_1 und C_2, also die ersten beiden C_n. Durch das Einsetzen von $C_0(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x) = c_\lambda(x)$ erhalten wir C_1:

$$\begin{aligned} C_1(x, \lambda, q) &= \int_0^x s_\lambda(x - t_1) q(t_1) C_0(t_1, \lambda, 0) dt_1 \\ &= \int_0^x c_\lambda(t_1) s_\lambda(x - t_1) q(t_1) dt_1. \end{aligned}$$

Durch erneutes Einsetzen erhält man C_2:

$$\begin{aligned} C_2(x, \lambda, q) &= \int_0^x s_\lambda(x - t_2) q(t_2) C_1(t_1, \lambda, q) dt_2 \\ &= \int_0^x s_\lambda(x - t_2) q(t_2) \left(\int_0^{t_2} c_\lambda(t_1) s_\lambda(t_2 - t_1) q(t_1) dt_1 \right) dt_2 \\ &= \iint_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 = x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{2} \left[s_\lambda(t_{i+1} - t_i) q(t_i) \right] dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Durch Induktion erhält man schließlich C_n und damit folgende Gleichung:

$$C_n(x,\lambda,q) = \int \cdots \int_{0\le t_1\le \ldots \le t_{n+1}=x} c_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \left[s_\lambda(t_{i+1}-t_i) q(t_i) \right] dt_1 \ldots dt_n$$

Somit ist y_1 eine formale Potenzreihe in q mit

$$y_1(x,\lambda,q) = c_\lambda(x) + \sum_{n\ge 1} C_n(x,\lambda,q).$$

Analog dazu funktioniert die Entwicklung von y_2 als Potenzreihe

$$y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n\ge 1} S_n(x,\lambda,q)$$

in q mit

$$S_n(x,\lambda,q) = \int \cdots \int_{0\le t_1\le \ldots \le t_{n+1}=x} s_\lambda(t_1) \prod_{i=1}^{n} \left[s_\lambda(t_{i+1}-t_i) q(t_i) \right] dt_1 \ldots dt_n.$$

Im folgenden Satz wird nun gezeigt, dass die Reihe auch gegen eine Lösung der Gleichung (1) konvergiert.

4 Konvergenz der Potenzreihen

Satz 4.1. *Die formalen Potenzreihen* $y_1(x,\lambda,q) = c_\lambda(x) + \sum_{n\ge 1} C_n(x,\lambda,q)$ *und* $y_2(x,\lambda,q) = s_\lambda(x) + \sum_{n\ge 1} S_n(x,\lambda,q)$ *konvergieren auf beschränkten Teilmengen von* $[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2_{\mathbb{C}}$ *gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung von*

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad\qquad 0 \le x \le 1$$

die folgende Anfangsbedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} y_1(0,\lambda,q) = y_2'(0,\lambda,q) = 1, \\ y_1'(0,\lambda,q) = y_2(0,\lambda,q) = 0. \end{aligned}$$

Ferner gelten die Integralgleichungen

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda,q) &= \cos(\sqrt{\lambda}x) + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_1(t,\lambda,q) dt, \\ y_2(x,\lambda,q) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))}{\sqrt{\lambda}} q(t) y_2(t,\lambda,q) dt \end{aligned}$$

und die Abschätzungen

$$|y_1(x,\lambda,q)|, |y_2(x,\lambda,q)| \le \exp\left(\left| \Im\left(\sqrt{\lambda}\right) \right| x + \|q\| \sqrt{x} \right).$$

Beweis: Wir beweise die Aussage für y_1. Der Beweis für y_2 funktioniert analog. Durch die Abschätzung

$$|c_\lambda(x)| = \frac{1}{2}\left|\exp(i\sqrt{\lambda}x) + \exp(-i\sqrt{\lambda}x)\right| \leq \exp\left(|\Im(\sqrt{\lambda})|x\right)$$

erhalten wir für $0 \leq x \leq 1$

$$|s_\lambda(x)| = \left|\int_0^x c_\lambda(t)dt\right| \leq \int_0^x \exp\left(|\Im(\sqrt{\lambda})|t\right) dt \leq \exp\left(|\Im(\sqrt{\lambda})|x\right).$$

Der n-te Term in der Potenzreihenentwicklung von y_1 kann dann wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned}|C_n(x,\lambda,q)| &\leq \int\cdots\int_{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_{n+1}=x} |c_\lambda(t_1)|\prod_{i=1}^n |s_\lambda(t_{i+1}-t_i)q(t_i)|dt_1\ldots dt_n \\ &\leq \exp\left(|\Im(\sqrt{\lambda})|x\right)\int\cdots\int_{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1\ldots dt_n.\end{aligned}$$

Der Wert des Integrals ändert sich nicht unter einer Permutation der Variablen $t_1,\ldots,t_n$. Außerdem ist die Vereinigung aller permutierten Integrationsbereiche genau $[0,x]^n$. Es folgt daher

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_{0\leq t_1\leq\ldots\leq t_{n+1}=x}\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1\ldots dt_n &= \frac{1}{n!}\int_{[0,x]^n}\prod_{i=1}^n |q(t_i)|dt_1\ldots dt_n \\ &= \frac{1}{n!}\left[\int_0^x |q(t)|dt\right]^n \\ &\leq \frac{1}{n!}\left(\|q\|\sqrt{x}\right)^n\end{aligned}$$

nach der Schwarzschen Ungleichung. Wir erhalten demnach folgende Abschätzung

$$|C_n(x,\lambda,q)| \leq \frac{1}{n!}\exp\left(|\Im(\sqrt{\lambda})|x\right)\left(\|q\|\sqrt{x}\right)^n$$

Das zeigt, dass die formale Potenzreihe für y_1 auf beschränkten Teilmengen von $[0,1]\times\mathbb{C}\times L^2$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert. Damit definiert die Reihe eine stetige Funktion und zugleich erhalten wird eine brauchbare Konvergenzabschätzung.

Im nächsten Schritt betrachten wir die zugehörige Integralgleichung

$$\begin{aligned}y_1(x,\lambda,q) &= c_\lambda(x) + \sum_{n\geq 1} C_n(x,\lambda,q) \\ &= c_\lambda(x) + \sum_{n\geq 1}\int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)C_{n-1}(t,\lambda,q)dt \\ &= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\left(\sum_{n\geq 1} C_{n-1}(t,\lambda,q)\right)dt \\ &= c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)y_1(t,\lambda,q)dt.\end{aligned}$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz können wir das Integral und die Summe vertauschen. Entsprechend ist die Integralgleichung für y_1 bewiesen. Es folgt, wie im Beweis von Lemma 2.1, dass y_1 eine Lösung von $-y'' + q(x)y = \lambda y$ zu den richtigen Anfangswerten ist.

Um schließlich die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $\tilde{y}_1$ eine weitere Lösung der Gleichung (1), die die gleichen Anfangswerte hat wie y_1. Aus Lemma 2.1 folgt

$$\tilde{y}_1 = c_\lambda(x) + \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)\tilde{y}_1(t)dt.$$

Dann erfüllt die Differenz $v(x) = y_1(x) - \tilde{y}_1(x)$ die Gleichung

$$v(x) = \int_0^x s_\lambda(x-t)q(t)v(t)dt$$

und somit gilt

$$|v(x)|^2 \leq \int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt \int_0^x |v(t)|^2 dt$$

Der erste Integrand lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\int_0^x |s_\lambda(x-t)q(t)|^2 dt &\leq \left(\max\{|s_\lambda^2(\tau)||0 \leq \tau \leq 1\}\right)^2 \int_0^x |q(t)|^2 dt \\ &\leq \left(\max\{|s_\lambda^2(\tau)||0 \leq \tau \leq 1\}\right)^2 \|q\|.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$|v(x)|^2 \leq \underbrace{\|q\| \max\{|s_\lambda^2(t)||0 \leq t \leq 1\}}_{:=c} \int_0^x |v(t)|^2 dt$$

nach der Ungleichung von Schwarz mit c. Es folgt, dass die nichtnegative Funktion $\exp(-cx)\int_0^x |v(t)|^2 dt$ eine nichtpositive Ableitung auf $[0,1]$ hat. Da sie bei 0 verschwindet, muss sie auf $[0,1]$ identisch verschwinden. Somit gilt $v(x) = 0$, was die Eindeutigkeit beweist. **q.e.d.**

5 Literaturverzeichnis

Pöschel, J., & Trubowitz, E. (1987). *Inverse spectral theory* (Vol. 130). Academic Press.

Fritzsche, K. (2020). *Grundkurs Analysis 1: Differentiation und Integration in einer Veränderlichen.* Springer-Verlag.

Schmidt, M. U. (2023). *Skript zur Vorlesung Analysis I und II.* Universität Mannheim.

Schmidt, M. U. (2025). *Skript zur Vorlesung Dynamische Systeme und Stabilität.* Universität Mannheim.