

Dirichlet-Problem III

Asymptotische Entwicklung der Eigenwerte und
Eigenfunktionen

Jessica Crutoi

Universität Mannheim
Fakultät für Wirtschaftsmathematik
22. Oktober 2025

*Seminararbeit über das Dirichlet-Problem
basierend auf dem Werk „Inverse Spectral Theory“ von Pöschel und Trubowitz*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Setup und Werkzeuge	2
2.1	Fundamentallösungen	2
2.2	Normierte Eigenfunktionen	3
2.3	Black Box: Zähllemma und Basisabschätzungen	3
3	Theorem 4	4
4	Korollar 1	8
5	Fazit	10

1 Einleitung

Im Rahmen einer Seminararbeit betrachten wir das **Dirichlet-Eigenwertproblem**

$$-y'' + q(x)y = \mu y, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

wobei $q \in L^2(0, 1)$ gegeben ist. Ziel ist es, das asymptotische Verhalten der Eigenwerte μ_n und der zugehörigen Eigenfunktionen g_n für $n \rightarrow \infty$ zu bestimmen. Die Ergebnisse verbinden das Potential q über seine Mittelwerte und Fourier-Koeffizienten mit den Spektraldaten und sind grundlegend für inverse Probleme.

2 Setup und Werkzeuge

Wir arbeiten auf dem Hilbertraum $L^2(0, 1)$ reellwertiger Funktionen. Der Sturm–Liouville-Operator lautet

$$L_q := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

mit Definitionsbereich $H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ und Dirichlet-Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$. Seine Spektralwerte (Eigenwerte) werden $\{\mu_n(q)\}_{n \geq 1}$ genannt.

Das Skalarprodukt auf $L^2(0, 1)$ ist

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx,$$

und die Norm ist $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

2.1 Fundamentallösungen

Für festes $\mu \in \mathbb{R}$ seien $y_1(\cdot, \mu)$ und $y_2(\cdot, \mu)$ die *Fundamentallösungen* der Gleichung

$$-y'' + q(x)y = \mu y$$

mit Anfangsbedingungen

$$y_1(0, \mu) = 1, \quad y_1'(0, \mu) = 0, \quad y_2(0, \mu) = 0, \quad y_2'(0, \mu) = 1.$$

Jede Lösung ist eine Linearkombination von y_1, y_2 .

2.2 Normierte Eigenfunktionen

Eine normierte Eigenfunktion zu $\mu_n(q)$ ist

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n(q))}{\|y_2(\cdot, \mu_n(q))\|}, \quad \|g_n\| = 1, \quad g_n(0) = g_n(1) = 0.$$

2.3 Black Box: Zähllemma und Basisabschätzungen

(i) **Zähllemma (Counting Lemma).**

$$\sqrt{\mu_n(q)} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

gleichmäßig auf beschränkten Mengen in $L^2(0, 1)$.

(ii) **Basisabschätzungen (Basic Estimates).** Für großes $\mu > 0$ verhalten sich die Fundamentallösungen $y_1(x, \mu)$ und $y_2(x, \mu)$ der Gleichung

$$-y'' + q(x)y = \mu y$$

folgendermaßen:

$$\begin{aligned} y_1(x, \mu) &= \cos(\sqrt{\mu}x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right), \\ y_2(x, \mu) &= \frac{\sin(\sqrt{\mu}x)}{\sqrt{\mu}} + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \\ y_1'(x, \mu) &= -\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}x) + O(1), \\ y_2'(x, \mu) &= \cos(\sqrt{\mu}x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right), \end{aligned}$$

gleichmäßig für $x \in [0, 1]$ und q in beschränkten Teilmengen von $L^2(0, 1)$.

Satz (asymptotisches Verhalten für große μ). Für $\mu \rightarrow \infty$ nähern sich die Fundamentallösungen den ungestörten trigonometrischen Funktionen an:

$$y_1(x, \mu) \rightarrow \cos(\sqrt{\mu}x), \quad \sqrt{\mu} y_2(x, \mu) \rightarrow \sin(\sqrt{\mu}x),$$

und ihre Ableitungen konvergieren entsprechend zu

$$y_1'(x, \mu) \rightarrow -\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}x), \quad y_2'(x, \mu) \rightarrow \cos(\sqrt{\mu}x).$$

Damit verhalten sich die Lösungen des gestörten Problems für große μ wie die Eigenfunktionen des ungestörten Operators $-y'' = \mu y$ mit Dirichlet-Randbedingungen.

3 Theorem 4

Voraussetzungen: $q \in L^2(0, 1)$, Dirichlet-Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$. Sei $g_n(\cdot, q)$ die L^2 -normierte Eigenfunktion zum Eigenwert $\mu_n(q)$.

$$\begin{aligned}\mu_n(q) &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t) dt - \langle \cos(2\pi nx), q \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ &= n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + \ell^2(n),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}g_n(x, q) &= \sqrt{2} \sin(\pi nx) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ g'_n(x, q) &= \sqrt{2} \pi n \cos(\pi nx) + O(1).\end{aligned}$$

Die Abschätzungen gelten gleichmäßig in beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2(0, 1)$.

Bemerkung. Die quadratsummierbare Folge $\ell^2(n)$ bezeichnet den Fehlerterm in der asymptotischen Entwicklung der Eigenwerte. Das bedeutet, dass die Abweichungen $\mu_n(q) - n^2\pi^2 - \int_0^1 q(t) dt + \langle \cos(2\pi nx), q \rangle$ nicht nur gegen null gehen, sondern sogar eine ℓ^2 -Struktur besitzen, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ell^2(n)|^2 < \infty.$$

Dies liefert eine stärkere Aussage über die Konvergenz und ermöglicht eine präzisere Analyse spektraler Störungen bei Variation des Potentials q .

Beweis. Wir zeigen das Resultat in mehreren Schritten.

Vorüberlegung: Rechtfertigung der trigonometrischen Näherung. Für große n liegt $\mu_n(q)$ nach dem Zähllemma in der Nähe von $n^2\pi^2$, genauer

$$\sqrt{\mu_n(q)} = n\pi + \delta_n, \quad \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wir können daher die Fundamentallösung $y_2(x, \mu_n)$ mit Hilfe des Additionstheorems entwickeln:

$$\sin(\sqrt{\mu_n} x) = \sin(n\pi x) \cos(\delta_n x) + \cos(n\pi x) \sin(\delta_n x) = \sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

da $\cos(\delta_n x) = 1 + O(1/n^2)$ und $\sin(\delta_n x) = O(1/n)$. Dieser Einschub zeigt, dass wir $\sin(\sqrt{\mu_n} x)$ von Anfang an durch $\sin(n\pi x)$ ersetzen dürfen, ohne die Gültigkeit der asymptotischen Formeln zu gefährden.

1. Normierung der Fundamentallösung y_2

Ausgangspunkt (Basic Estimates). Für großes n gilt

$$y_2(x, \mu_n) = \frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{\mu_n}\right), \quad x \in [0, 1].$$

Normquadrat entwickeln.

$$\|y_2(\cdot, \mu_n)\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \right)^2 dx = \frac{1}{\mu_n} \int_0^1 \sin^2(\sqrt{\mu_n} x) dx + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Trigonometrische Umformung. Mit $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$ folgt

$$\frac{1}{\mu_n} \int_0^1 \sin^2(\sqrt{\mu_n} x) dx = \frac{1}{2\mu_n} \int_0^1 (1 - \cos(2\sqrt{\mu_n} x)) dx = \frac{1}{2\mu_n} - \frac{\sin(2\sqrt{\mu_n})}{4\mu_n^{3/2}}.$$

Mit $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$ ist $\sin(2\sqrt{\mu_n}) = O(1/n)$. Damit lässt sich der Ausdruck *relativ* zu $\frac{1}{2\mu_n}$ schreiben als

$$\|y_2(\cdot, \mu_n)\|^2 = \frac{1}{2\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

(Die zuvor auftauchende absolute Ordnung $O(1/n^3)$ wird hier zur *relativen* Ordnung $O(1/n)$ gegenüber dem Hauptterm $\frac{1}{2\mu_n}$, da $\frac{1}{2\mu_n} = O(1/n^2)$.)

Wurzelziehen.

$$\|y_2(\cdot, \mu_n)\| = \frac{1}{\sqrt{2\mu_n}} \sqrt{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\mu_n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Inversion.

$$\|y_2(\cdot, \mu_n)\|^{-1} = \sqrt{2\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Normierte Eigenfunktion. Mit $y_2(x, \mu_n) = \frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{\mu_n}\right)$ erhält man

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|} = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Verfeinerte Näherung der Eigenwerte

Aus Theorem 3

$$\mu_n(q) - \mu_n(0) = \int_0^1 \langle g_n^2(x, tq), q \rangle dt, \quad \mu_n(0) = n^2 \pi^2.$$

Quadrat der normierten Eigenfunktion Aus der Normierung gilt

$$g_n(x, q) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

also

$$g_n(x, q)^2 = 2 \sin^2(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \cos(2\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$ (Zähllemma) und dem Additionssatz ergibt sich

$$g_n(x, q)^2 = 1 - \cos(2\pi n x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Eigenwertformel Setzt man dies in die Integraldarstellung ein:

$$\mu_n(q) - \mu_n(0) = \int_0^1 \langle 1 - \cos(2\pi n x) + O(1/n), q \rangle dt.$$

Da das $O(1/n)$ -Glied unabhängig von t ist, folgt

$$\mu_n(q) - n^2\pi^2 = \int_0^1 q(t) dt - \langle q, \cos(2\pi n x) \rangle + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Äquivalente Schreibweise mit quadratsummierbarer Folge Da die Fourier-Koeffizienten $\langle q, \cos(2\pi n x) \rangle$ selbst eine ℓ^2 -Folge bilden, gilt:

$$\langle q, \cos(2\pi n x) \rangle \in \ell^2(n), \quad O\left(\frac{1}{n}\right) \in \ell^2(n).$$

Somit lässt sich die Gleichung auch schreiben als

$$\mu_n(q) = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(t) dt + \ell^2(n),$$

wobei die $\ell^2(n)$ -Terme sowohl die Fourier-Koeffizienten $\langle q, \cos(2\pi n x) \rangle$ als auch die asymptotischen Restglieder enthalten.

3. Asymptotik der Eigenfunktionen g_n und ihrer Ableitungen

Ausgangspunkt Nach der Normierung gilt

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|}, \quad y_2(x, \mu_n) = \frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{\mu_n}\right), \quad \|y_2(\cdot, \mu_n)\|^{-1} = \sqrt{2\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Einsetzen in die Definition von g_n .

$$g_n(x, q) = \sqrt{2\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \right) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$ (Zähllemma) und dem Additionssatz folgt

$$\sin(\sqrt{\mu_n} x) = \sin(n\pi x) \cos(\delta_n x) + \cos(n\pi x) \sin(\delta_n x) = \sin(n\pi x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

wobei $\delta_n = \sqrt{\mu_n} - n\pi = O(1/n)$. Daher gilt die asymptotische Darstellung

$$g_n(x, q) = \sqrt{2} \sin(\pi n x) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

gleichmäßig für $x \in [0, 1]$ und q in beschränkten Teilmengen von $L^2(0, 1)$.

Ableitung Aus der Definition $g_n(x, q) = y_2(x, \mu_n) / \|y_2(\cdot, \mu_n)\|$ folgt

$$g'_n(x, q) = \frac{y'_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|},$$

da die Norm $\|y_2(\cdot, \mu_n)\|$ unabhängig von x ist.

Einsetzen der Basic Estimates für y'_2 Nach den Basic Estimates gilt für großes μ_n

$$y'_2(x, \mu_n) = \cos(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right).$$

Mit der Normierung $\|y_2(\cdot, \mu_n)\|^{-1} = \sqrt{2\mu_n}(1 + O(1/n))$ erhält man

$$g'_n(x, q) = \sqrt{2\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(\cos(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) \right) = \sqrt{2\mu_n} \cos(\sqrt{\mu_n} x) + O(1).$$

Mit $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$ folgt daraus

$$g'_n(x, q) = \sqrt{2} \pi n \cos(\pi n x) + O(1),$$

gleichmäßig für $x \in [0, 1]$ und beschränktes $q \in L^2(0, 1)$.

Somit haben wir die asymptotische Struktur der Eigenfunktionen vollständig bestimmt: Die Hauptordnung entspricht exakt der ungestörten Sinusbasis, und die Störung durch q erscheint nur in den kleineren Korrekturgliedern der Größenordnung $O(1/n)$.

Damit ist die asymptotische Entwicklung sowohl der Eigenwerte als auch der Eigenfunktionen gezeigt.

□

4 Korollar 1

Korollar 1. Für $q \in L^2(0, 1)$ gilt:

$$g_n^2 = 1 - \cos(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \frac{d}{dx} g_n^2 = 2\pi n \sin(2\pi nx) + O(1),$$

und

$$a_n = \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{d}{dx} a_n = \cos(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen von $[0, 1] \times L^2(0, 1)$.

Beweis. **(1) Basic Estimates.** Für großes n (mit $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$) gelten gleichmäßig in $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} y_1(x, \mu_n) &= \cos(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right), & y_1'(x, \mu_n) &= -\sqrt{\mu_n} \sin(\sqrt{\mu_n} x) + O(1), \\ y_2(x, \mu_n) &= \frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), & y_2'(x, \mu_n) &= \cos(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

und aus der Normierung (vorheriger Abschnitt)

$$\|y_2(\cdot, \mu_n)\|^{-1} = \sqrt{2\mu_n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Damit

$$g_n(x, q) = \frac{y_2(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|} = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad g_n'(x, q) = \frac{y_2'(x, \mu_n)}{\|y_2(\cdot, \mu_n)\|} = \sqrt{2\mu_n} \cos(\sqrt{\mu_n} x) + O(1).$$

(2) g_n^2 Quadrieren und trigonometrische Identität $2\sin^2 \alpha = 1 - \cos(2\alpha)$:

$$\begin{aligned} g_n(x, q)^2 &= \left(\sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2 \\ &= 2\sin^2(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \cos(2\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Mit $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$ und dem Additionssatz $\cos(2\sqrt{\mu_n} x) = \cos(2\pi nx) + O(1/n)$ folgt

$$\boxed{g_n(x, q)^2 = 1 - \cos(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

(3) Ableitung von g_n^2 (Kettenregel) Setze $h_n(x) := g_n(x, q)$. Dann

$$\frac{d}{dx} h_n(x)^2 = 2 h_n(x) h_n'(x).$$

Mit den Abschätzungen aus (1):

$$\begin{aligned} 2 h_n(x) h'_n(x) &= 2 \left(\sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(\sqrt{2\mu_n} \cos(\sqrt{\mu_n} x) + O(1) \right) \\ &= 4\sqrt{\mu_n} \sin(\sqrt{\mu_n} x) \cos(\sqrt{\mu_n} x) + O(1) \\ &= 2\sqrt{\mu_n} \sin(2\sqrt{\mu_n} x) + O(1), \end{aligned}$$

wobei $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ benutzt wurde. Mit $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$ und $\sin(2\sqrt{\mu_n}x) = \sin(2\pi nx) + O(1/n)$ erhalten wir

$$\boxed{\frac{d}{dx} g_n(x, q)^2 = 2\pi n \sin(2\pi nx) + O(1)}.$$

(4) Definition $a_n := y_1(\cdot, \mu_n) y_2(\cdot, \mu_n)$ Mit den Basic Estimates

$$a_n(x) = y_1(x, \mu_n) y_2(x, \mu_n) = \left(\cos(\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left(\frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Hauptterm:

$$\cos(\sqrt{\mu_n} x) \frac{\sin(\sqrt{\mu_n} x)}{\sqrt{\mu_n}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \sin(2\sqrt{\mu_n} x).$$

Damit insgesamt

$$a_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \sin(2\sqrt{\mu_n} x) + O\left(\frac{1}{\mu_n}\right).$$

Setzt man $\sqrt{\mu_n} = n\pi + O(1/n)$, so

$$\boxed{a_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

(5) Ableitung von a_n . Aus dem zuvor erhaltenen Ausdruck

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

folgt durch direktes Differenzieren

$$a'_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \cdot (2\pi n \cos(2\pi nx)) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\boxed{a'_n(x) = \cos(2\pi nx) + O\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Damit sind die in der Aussage von Korollar 1 angegebenen Asymptotiken für g_n^2 , $\frac{d}{dx} g_n^2$, a_n und a'_n hergeleitet.

□

5 Fazit

Theorem 4 liefert eine präzise asymptotische Beschreibung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Dirichlet-Problems. Wesentlich ist die Rolle des Mittelwerts von q und der Koeffizienten $\langle q, \cos(2\pi nx) \rangle$, die direkt in die Spektralkorrekturen eingehen. Korollar 1 zeigt, dass sich daraus auch Aussagen über Quadrate/Produkte der Eigenfunktionen ableiten lassen — relevant für inverse Fragestellungen.

Literatur

- Pöschel, J. & Trubowitz, E. (1986): *Inverse Spectral Theory*. Academic Press.
- Vorlesungsnotizen, vorherige Seminarvorträge und eigene Ausarbeitungen (Seminar), Universität Mannheim, 2025.