

Aufgabe 1

$$\text{I. A. } n=1 \quad \sum_{k=1}^1 \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = \sqrt{1} \quad \checkmark$$

die Aussage gilt für $n=1$

$$\text{I. V. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1}} \stackrel{?}{\geq} \sqrt{n+1}$$

$$\sqrt{n+1} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} \quad \sqrt{n} \sqrt{n+1} + 1 \geq \sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} = n+1$$

also gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}. \text{ Also}$$

folgt die Aussage für $n+1$.

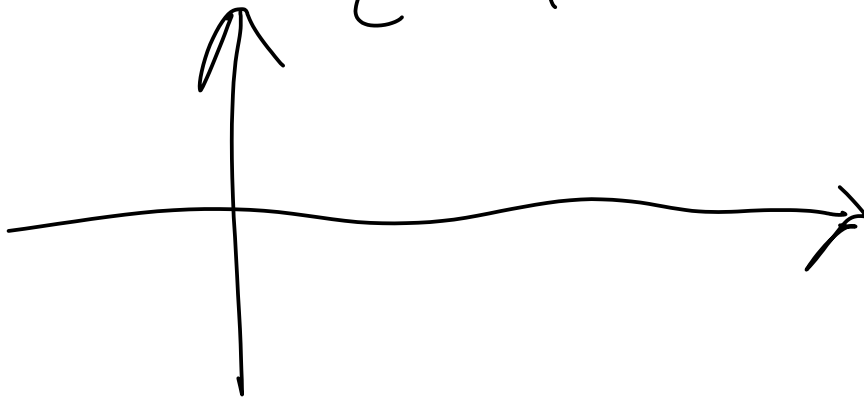
$$1b.) |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| \quad z = x + iy$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| \quad \text{beide Zahlen } \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq 0. \quad \text{Wegen } y^2 \geq 0 \text{ ist das} \\ \text{äquivalent zu } y = 0.$$

$$\Rightarrow A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}.$$



A ist die
x-Achse.

Aufgabe 2 a)

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{h^3 - 1}{(h+1)^3} &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{h}\right)^3}{\left(1 + \frac{1}{h}\right)^3} \\ &= \frac{1 - \left(\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h}\right)^3}{\left(1 + \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h}\right)^3} = \frac{1 - 0^3}{(1+0)^3} = 1. \end{aligned}$$

2b) $\left(\sum \sqrt{\frac{1+h^2}{n^4}} \right)_{h \in \mathbb{N}}$

$$\sqrt{\frac{1+h^2}{n^4}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^2} + 1}{n^2}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{h^2}} \Rightarrow \frac{1}{h}.$$

$$\sqrt{\frac{1+h^2}{n^4}} \geq \sqrt{\frac{h^2}{n^4}} = \sqrt{\frac{1}{h^2}} = \frac{1}{h}.$$

$$\Rightarrow \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1+h^2}{n^4}} = \infty. \text{ Reihe divergiert (Majorantenkriterium)}$$

3. Kundentanz

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - \ln(1+x^2)$$

$$1) f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{1+x^2}$$

$$= x \frac{\sqrt{1+x^2} - 2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } \sqrt{1+x^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } 1+x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{für } x < -\sqrt{3}: f'(x) < 0$$

$$\text{für } -\sqrt{3} < x < 0$$

$$\text{für } 0 < x < \sqrt{3}$$

$$\text{für } \sqrt{3} < x$$

$$f'(x) > 0$$

$$f'(x) < 0$$

$$f'(x) > 0$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{3}$$

Minimum, $x = 0$ Max

$x = \sqrt{3}$ Min.

$$3b) \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

2te Regel oder Hospital

$$\frac{(\ln(1+x^2))'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \frac{\cancel{2x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \quad \text{Das zeigt die Aussage.}$$

$$3c) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} |x| \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = \infty$$

Wege b) folgt $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \infty$

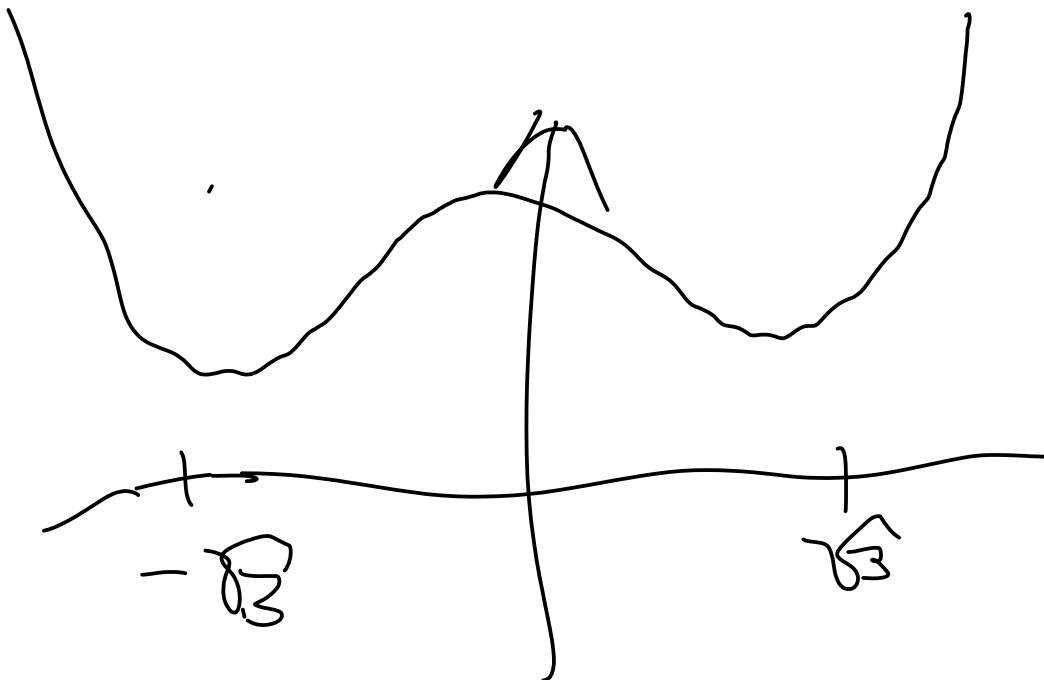
$$f(\pm\sqrt{3}) = \sqrt{4} - \ln(4) = 2 - \ln(4)$$

Wegen Monotonie sind $x = \pm\sqrt{3}$
die globalen Minima.

Wegen der Zwischenwertsatz und
es folgt $f(\mathbb{R}) = [2 - \ln(4), \infty)$

$$e.) 2 = \ln(e^2) > \ln(4).$$

$$\Rightarrow 2 - \ln(4) > 0 \Rightarrow \text{kein Nullstelle}$$



$$f(c) = 1.$$

$$4a) \int \ln(x^2) \frac{dx}{x}$$

$$\ln(x^2) = 2 \ln(x).$$

$$t = \ln(x^2)$$

$$dt = \frac{2x}{x^2} dx = \frac{2}{x} dx$$

$$\int \ln(x^2) \frac{dx}{x} = \int t \frac{dt}{2} = \frac{t^2}{4} + C.$$

$$= \frac{(\ln(x^2))^2}{4} + C = \ln^2(x) + C.$$

$$4b) \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx \text{ Partialbruchzerlegung.}$$

$$1. \quad \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}.$$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$2 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x=1 \quad 2=2A, A=1 \quad x=-1 \quad 2=-2B \quad B=-1$$

$$(x+1) - (x-1) = 2.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^2-1} dx &= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + C. \\ &= x + \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$f(0) = 0, \quad f'(x) \geq \frac{1}{L}.$$

5a) Mittelwertsatz

für $x \neq y$ gibt es in $\mathbb{R}$ zwischen x und y

$$\text{w.d.} \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z) \geq \frac{1}{L}.$$

$$5b) \quad \text{für } x \neq y \text{ gilt } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \neq 0$$

$\Rightarrow f(x) \neq f(y)$ Also ist f injektiv.

5c) Weil f diff'bar ist, ist f auch stetig.

$$\text{für } x > y \text{ gilt } f(x) - f(y) \geq \frac{x - y}{L}.$$

$$\Rightarrow \text{für } x \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - y}{L} = \infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty. \quad \lim_{y \rightarrow \infty} -f(y) = -f(x + \frac{x}{L}) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) &= -\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\Rightarrow f \text{ ist surjektiv} \\ &\text{wegen Zwischenwertsatz} \end{aligned}$$

5a) f ist bijektiv.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \leq L.$$

Schubensatz

$\Rightarrow L$ ist Lipschitzkonstante von

$$f^{-1} \quad f'(x) \geq \frac{1}{L} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(x)} \leq L.$$

$$A = \left\{ \frac{n-m}{n+m} \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Besten $\sup A$, $\inf A$.

$$\frac{n-m}{n+m} < \frac{n}{n+m} < 1. \quad \text{Wähle } m=1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

$1 \leq \sup A \leq 1$ Weil jede Zahl
kleiner 1 aber unter Schraube von A ist.

$$\frac{n-m}{n+m} > \frac{-m}{n+m} > -1.$$

$$\frac{m}{n+m} < 1 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-m}{1+m} = -1.$$

$\Rightarrow \inf A = -1.$

für welche Zahlen $\alpha \in \mathbb{R}$

ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig?

Antwort für $\alpha \geq 0$.

Proof: Für jede Nullfolge

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auch $|x_n|^\alpha$ gegen Null. Sind wir im Betrag ≤ 1

Also ist f für $\alpha \geq 0$ stetig.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \text{für } \alpha \geq 0.$$

Für jedes n gilt es in n

$$\text{hint } |x_n| < \frac{1}{n}.$$

$$\Rightarrow |x_n|^\alpha < \frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0$$

$$\text{für } \alpha < 0 \quad |x|^\alpha \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow 0.$$

$$\text{für } \alpha = 0: |x|^0 = 1$$

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ stetig?}$$

$$\text{Nein, } \frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$$

$$x_n = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{2} + k\right)} \rightarrow 0$$

$$\sin(x_n) = 1.$$

$$\frac{1}{x_n} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \pi\left(-\frac{1}{2} + k\right)$$

$$x_n = \frac{1}{\pi\left(-\frac{1}{2} + k\right)} \rightarrow 0 \quad \sin(x_n) = -1$$

Zeigen Sie, dass $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$
 $x \rightarrow \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig
 ist.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon \quad \text{wenn} \quad |x - y| < \delta$$

für alle $x, y \in [0, \infty)$.
 Sei $x \neq y$.

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

G.B.d.A. $y < x \Rightarrow \sqrt{y} < \sqrt{x}$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Teil $[0, \infty)$ in $[0, 1] \cup (1, \infty)$

Auf $[0, 1]$ ist $x \mapsto \hat{x}$ gleichmäßig
stetig.

Wenn $x, y \in [0, 1]$ gegeben sind
zu zeigen $\varepsilon > 0$

Wenn x oder y oder beide
in $(1, \infty)$ liegen

$$\Rightarrow \delta = \varepsilon$$

hin der δ auf $[0, 1]$

und von ε .