

Kapitel 7

Differenzierbare Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$$

7.1 Definition der Ableitung

Definition 7.1. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion auf einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{K}$), die in $\mathbb{R}$ eine Umgebung von $x_0 \in X$ ist. Dann heißt f im Punkt x_0 (komplex) differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathbb{K}$ gibt, so dass die folgende Funktion stetig in x_0 ist:

$$X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Wenn X in $\mathbb{R}$ offen und f in allen $x \in X$ differenzierbar ist, heißt f differenzierbar und die Funktion $f' : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ heißt Ableitung von f .

Satz 7.2. Sei f im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f im Punkt x_0 auch stetig.

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Wir benutzen das Kriterium in Satz 5.14 (iii). Dann folgt die Aussage aus der Stetigkeit von $x \mapsto x - x_0$ und den Rechenregeln für Folgen in Satz 3.5 (i) und (iii). **q.e.d.**

Definition 7.3. Das Differential von f im Punkt x_0 ist die lineare Abbildung $df(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, \quad h \mapsto f'(x_0)h$. Die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$ heißt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Dabei ist

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte $(x_0, f(x_0)) \neq (x_1, f(x_1))$ des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\}.$$

Im Grenzwert $x_1 \rightarrow x_0$ nähert sich die Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ an die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an.

Beispiel 7.4. (i) $f(x) = |x|$. Für $x_0 = 0$ ist $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ Also ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

(ii) $f(x) = c \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

(iii) $f(x) = x \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 1$.

(iv) $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

(v) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$ auch ein Potenzreihe mit Konvergenzradius R und wegen Satz 4.28 (iv) stetig. Deshalb ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = a_1$. Aus Satz 4.29 (ii) folgt, dass f für alle $x \in B(0, R)$ in x differenzierbar und die Ableitung $f'(x)$ gegeben ist durch die Potenzreihe $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mit Konvergenzradius R .

(vi)

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

(vii)

$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

(viii)

$$\cos'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{(2k)!} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!} = -\sin(x).$$

7.2 Rechenregeln der Ableitung

Satz 7.5. Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind auch die Funktionen λf , $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0) & (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) & & \text{(Leibnizregel).} \end{aligned}$$

Wenn $f(x_0) \neq 0$ dann ist $X' = f^{-1}[\mathbb{K} \setminus \{0\}]$ wegen Satz 7.2 eine Umgebung von x_0 und $\frac{1}{f} : X' \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ in x_0 differenzierbar mit $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Beweis: Für $x \neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} &= \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x_0 - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) && \text{und} \\ \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} &= -\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)}. \end{aligned}$$

Also folgt die Aussage aus Beispiel 5.19 und Satz 7.2.

q.e.d.

Satz 7.6 (Kettenregel). Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen und $X \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von x_0 und $Y \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis: $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, wobei wir den linken Faktor für $f(x) = f(x_0) = y_0$ durch $g'(y_0)$ ersetzen. Dieser linke Faktor ist die Komposition von $x \mapsto f(x)$ mit $y \mapsto \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ für $y \neq y_0$ und $y_0 \rightarrow g'(y_0)$, also wegen Satz 5.16 und Satz 7.2 in x_0 stetig. Also folgt die Behauptung aus Beispiel 5.19. **q.e.d.**

Satz 7.7 (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Funktion von einer Umgebung $X \subset \mathbb{R}$ von x_0 auf eine Umgebung $Y \subset \mathbb{R}$ von $y_0 = f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$ und entweder f auf einer Umgebung von x_0 oder f^{-1} in y_0 stetig ist, dann ist auch f^{-1} in y_0 differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Beweis: $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ für $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$. Die erste der beiden folgenden Funktionen ist die Komposition von $y \rightarrow f^{-1}(y)$ mit der zweiten

$$y \mapsto \begin{cases} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0, \\ \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} & \text{für } y = y_0, \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{für } x \neq x_0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(x_0), \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x = x_0. \end{cases}$$

Der Satz folgt aus Korollar 5.16, Beispiel 5.19 (iii) und Korollar 6.5.

q.e.d.

Beispiel 7.8. (i) $\ln(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \text{ mit } \exp(y) = x.$$

(ii) $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \sin(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

(iii) $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \cos(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

(iv) $\cdot^\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

$$(\cdot^\alpha)'(x) = \exp(\alpha \ln(x))' = \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(v) $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x, a \in (0, \infty).$

$$(a)'(x) = \exp(x \cdot \ln(a))' = \exp(x \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x.$$

(vi) Quotientenregel. Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0)} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(vii) $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(viii) $x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x) \sin(x) - \cos(x) \cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix) $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ mit } \tan(y) = x.$$

(x) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(y)} = \frac{-1}{1 + x^2} \text{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi) $\log_a(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) \quad \log_a'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{x \ln(a)}.$

(xii) $x^x : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \left(\ln(x) + x \frac{1}{x} \right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0 \pm} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber f' ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

Definition 7.9 (lokale Maxima und Minima). Eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ hat bei $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ gilt. Bei strikten Ungleichungen sprechen wir von strikten lokalen Maxima und Minima.

Wenn für eine bei x_0 differenzierbaren Funktion $f'(x_0)$ nicht verschwindet, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < |f'(x_0)|$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt. Dort hat $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ das gleiche Vorzeichen wie $f'(x_0)$. Dann gilt entweder $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ oder $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Das zeigt

Lemma 7.10. Ein differenzierbarer lokaler Extremwert ist eine Nullstelle von f' . **q.e.d.**

Definition 7.11 (kritischer Punkt und kritischer Wert). *Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kandidaten für die lokalen Extremwerte einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind

- (i) Kritische Punkte in (a, b) ,
- (ii) Randpunkte, also entweder a oder b ,
- (iii) und Punkte in (a, b) an denen f nicht differenzierbar ist.

Satz 7.12 (Satz von Rolle). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Wegen Satz 5.26 gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. Wenn x_1 und x_2 beide in $\{a, b\}$ liegen oder gleich sind, dann muss f konstant gleich $f(a) = f(b)$ sein. Also gilt dann $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in (a, b) geben, an dem wegen Lemma 7.10 $f' = 0$ ist. **q.e.d.**

Satz 7.13 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0), \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ für } g(b) \neq g(a), g'(x_0) \neq 0.$$

Die Tangente $(f(x_0), g(x_0)) + \mathbb{R}(f'(x_0), g'(x_0))$ an $\{(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ in $(f(x_0), g(x_0))$ verläuft also parallel zu der Geraden durch $(f(a), g(a))$ und $(f(b), g(b))$.

Beweis: $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 7.12. Die Ableitung ist Null für $f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$. **q.e.d.**

Satz 7.14 (Mittelwertsatz). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Beweis: Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf f und $\mathbb{1}_{[a, b]}$ an. **q.e.d.**

Satz 7.15 (Schränkensatz). *Eine auf (a, b) differenzierbare stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitzstetig, wenn für alle $x \in (a, b)$ die Lipschitzkonst. $L \geq |f'(x)|$.*

Beweis: Für $x < y \in [a, b]$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$. Dann folgt $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ aus $|f'(x_0)| \leq L$. Umgekehrt folgt $|f'(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right| \leq L$ für $x_n \rightarrow x$ aus $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$. **q.e.d.**

Satz 7.16 (Ableitung und Monotonie). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt*

- (i) $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b) \iff f$ ist konstant.

- (ii) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \iff f$ ist monoton steigend.
- (iii) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \iff f$ ist monoton fallend.
- (iv) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$ ist $[a, b] \iff f$ ist streng monoton steigend.
- (v) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a, b) \mid f'(x) < 0\}$ ist $[a, b] \iff f$ ist streng monoton fallend.

Beweis: Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nur (ii) und (iv). Für $a \leq x < y \leq b$ erfüllt $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Aus $f'(x_0) \geq 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$ folgt $f(y) - f(x) \geq 0$, und f ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt $f(x_0) > f(x)$ für ein $x > x_0$ aus $f'(x_0) < 0$ und f ist nicht monoton steigend. Es folgt (ii). Monoton wachsende f sind genau dann streng monoton, wenn es kein $a \leq x < y \leq b$ gibt mit $f(x) = f(y)$. Auf $[x, y]$ ist dann f konstant und $f'(z) = 0$ für $z \in (x, y)$. Weil jede offene Menge ein solches Intervall enthält folgt (iv). **q.e.d.**

Korollar 7.17 (Isolierte kritische Punkte). Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ ein kritischer Punkt.

- (i) f' bei x_0 differenzierbar mit $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ ist ein striktes lokales Minimum.
- (ii) f' bei x_0 differenzierbar mit $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ ist ein striktes lokales Maximum.
- (iii) Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Minimum.
- (iv) Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Maximum. **q.e.d.**

Beispiel 7.18. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = (1 - (x + 1))e^{-x} = -xe^{-x}$. Also ist sie auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend. Insbesondere ist $f(0) = 1$ ein globales Maximum. Also gilt $x + 1 \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \leq e^{y-1}$ für alle $y = x + 1 \in \mathbb{R}$.

7.4 Regel von de L'Hopital

Definition 7.19 (Grenzwert von Funktionswerten). Für eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ genau dann, wenn für ein $f(a) \in \mathbb{K}$ die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (a, b) \\ f(a) & \text{für } x = a \end{cases} \quad \text{stetig bei } x = a \text{ ist. Wir schreiben dann } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a).$$

Der analoge Grenzwert $x \rightarrow b$ wird mit $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ also genau dann, wenn es ein $f(a) \in \mathbb{K}$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit dem $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$ aus $x \in B(a, \delta) \cap (a, b)$ folgt. Wegen Satz 5.14 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) , die gegen a konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Satz 7.20 (1. Regel von de L'Hopital). *Seien $\infty < a < b < \infty$ und f und g auf (a, b) differenzierbare Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$. Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Bemerkung 7.21. *Wenn die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a+} g'(x)$ existieren und der zweite nicht verschwindet, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a+} g'(x)}$.*

Beweis: Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, ist $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$ mit $a < b' \leq b$. Aus dem Mittelwertsatz folgt $g(x) - g(a) \neq 0$ für $x \in (a, b')$. Die auf $[a, b']$ stetig fortgesetzten Funktionen f und g erfüllen die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes $x \in (a, b')$ ein $x_0 \in (a, x)$ so dass $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ gilt. Wenn also der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Satz 7.22 (2. Regel von de L'Hopital). *Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1. Regel von de L'Hopital, nur gelte $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$ (d.h. $\forall \beta \in \mathbb{R} \exists c \in (a, b)$ mit $(a, c) \subset f^{-1}[(\beta, \infty))$) statt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, dann gilt dieselbe Schlussfolgerung.*

Beweis: Wenn $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gibt es $b' \in (a, b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$. Für $a < x < y < b'$ folgt $g(y) \neq g(x)$ aus dem Mittelwertsatz, und wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es $x_0 \in (x, y)$ mit $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn f und g die Voraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $y \in (a, b')$, so dass es für alle $x_0 \in (a, y)$ gilt $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ mit $\alpha = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann folgt $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in (a, y)$. Wegen $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$ gibt es ein $y_0 \in (a, y)$ so dass für alle $x \in (a, y_0)$ gilt $g(x) > \max\{g(y), 0\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(y) &< f(x) < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)(g(x) - g(y)) + f(y) \quad \text{oder} \\ \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} &< \frac{f(x)}{g(x)} < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y)\left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$ gibt es dann auch ein $y_1 \in (a, y_0)$, so dass für alle $x \in (a, y_1)$ gilt $\alpha - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$. Also gilt $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow b-}$ gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow -\infty+} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \infty-} f(x)$ definieren wir als die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0-} f(1/x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(1/x)$. Wegen der Kettenregel gilt dann

$$\frac{df(\frac{1}{x})}{dx} \left(\frac{dg(\frac{1}{x})}{dx} \right)^{-1} = \frac{-1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) \left(\frac{-1}{x^2} g'(\frac{1}{x}) \right)^{-1} = f'(\frac{1}{x}) / g'(\frac{1}{x}).$$

Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

7.5 Konvexität und Ableitungen

Definition 7.23. Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt konvex bzw. streng konvex, wenn für alle $a \neq b$ im Definitionsbereich und alle $t \in (0, 1)$ folgendes gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad \text{bzw.} \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

Satz 7.24. Für eine reelle Funktion f auf einem Intervall I ist folgendes äquivalent:

(i) f ist konvex

(ii) Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(iii) Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

(iv) Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$.

Die analogen Äquivalenzen zu streng konvex gelten, wenn $\leq$ durch $<$ ersetzt wird.

Beweis: Wir können wegen der Symmetrie $(a, b, t) \leftrightarrow (b, a, 1-t)$ in (i) $a < b$ annehmen. Dann sei $x = (1-t)a + tb \in (a, b) \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \in (0, 1)$. Also ist (i) äquivalent zu

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b).$$

Ersetzen wir entweder $(b-x) = (b-a) - (x-a)$, oder $(x-a) = (b-a) - (b-x)$ oder $(b-a) = (b-x) + (x-a)$, dann ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$(b-a)(f(x) - f(a)) \leq (x-a)(f(b) - f(a)) \quad \Leftrightarrow \quad \text{(ii)}$$

$$(b-a)(f(x) - f(b)) \leq (b-x)(f(a) - f(b)) \quad \Leftrightarrow \quad \text{(iii)}$$

$$(b-x)(f(x) - f(a)) \leq (x-a)(f(b) - f(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \text{(iv)}.$$

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen $\leq$ durch $<$ ersetzen. **q.e.d.**

Korollar 7.25. Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall I , die in $I^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus I}$ differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent:

- (i) f ist (streng) konvex.
- (ii) f' ist auf I° (streng) monoton wachsend.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Seien $a < x < b$ Punkte im Inneren von I . Die Grenzwerte $x \rightarrow a+$ in (ii) und $x \rightarrow b-$ in (iii) aus Satz 7.24 zeigen $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$ und damit (ii). (ii) $\Rightarrow$ (i): Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz $y \in (a, x)$ und $z \in (x, b)$ mit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y) \leq f'(z) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Aus Satz 7.24 (iv) folgt (i). **q.e.d.**

Korollar 7.26. Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall I , die in $I^\circ = \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus I}$ zweimal differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent

- (i) f ist (streng) konvex.
- (ii) Für alle $x \in I^\circ$ gilt $f''(x) \geq 0$ (und $I = \overline{\{x \in I^\circ \mid f''(x) > 0\}}$).

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.25 und Satz 7.16. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen zwischen den Funktionswerten alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion f genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion $-f$ (streng) konvex ist.

Übungsaufgabe 7.27. Zeige, dass die Umkehrfunktion einer (streng) konvexen bijektiven (streng) monoton wachsenden Funktion (streng) konkav ist.

Beispiel 7.28. (i) $f(x) = x^\alpha$, $\implies f'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$. Also ist f für $\alpha < 1$ streng konkav, für $\alpha = 1$ sowohl konvex als auch konkav und für $\alpha > 1$ streng konvex.

(ii) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto \exp(x) \implies \exp'' = \exp$. Also ist $\exp$ streng konvex.

(iii) $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x) \implies \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Also ist $\ln$ streng konkav.

Satz 7.29 (Ungleichung von Jensen)*. Sei f eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien $x_1, \dots, x_n$ im Definitionsbereich und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen, die $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ erfüllen. Dann gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Beweis*: durch vollständige Induktion:

(i) Für $n = 1$ muss $\lambda_1 = 1$ sein, so dass die Aussage klar ist.

- (ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \dots, x_{n+1}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ wie gefordert. Dann definieren wir $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ und $x = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}x_n$. Also gilt $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$ und $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda}f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}f(x_n)$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = \dots = x_n$. Weil f konvex ist folgt aber $f(\lambda x + (1 - \lambda)x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für $x_{n+1} = x = x_1 = \dots = x_n$. **q.e.d.**

Korollar 7.30 (Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel)*. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Dann gilt für positive Zahlen $x_1, \dots, x_n$

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Gleichheit gilt nun für $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Beweis*: $-\ln$ ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -\lambda_1 \ln x_1 - \dots - \lambda_n \ln x_n \\ \iff \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n &\leq \ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von $\exp$ folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Ersetzen wir $x_1, \dots, x_n$ durch $y_1^{1/\lambda_1}, \dots, y_n^{1/\lambda_n}$ so erhalten wir

Korollar 7.31* Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Dann gilt

$$y_1 \cdots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \dots + \lambda_n y_n^{1/\lambda_n}$$

für alle $y_1, \dots, y_n \in (0, \infty)$. Gleichheit gilt nur für $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \dots = y_n^{1/\lambda_n}$. **q.e.d.**

Korollar 7.32 (Youngsche Ungleichung). Seien $p, q \in (0, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \quad \text{für alle } x, y \in (0, \infty) \text{ und Gleichheit nur } x^p = y^q.$$

Beweis: Wegen der strengen Monotonie von $\ln$ ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\ln(xy) = \frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) = \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \quad \text{mit } a = x^p \text{ und } b = y^q.$$

Weil $\ln$ streng konkav ist, gilt diese Ungleichung und Gleichheit nur für $a = b$. **q.e.d.**

7.6 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen I (Teilmenge von $\mathbb{R}$) ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder eine Funktion auf I . Die Bildung der Ableitung ist also eine lineare Abbildung $\frac{d}{dx}$, die differenzierbaren Funktionen auf I , Funktionen auf I zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diese Abbildung nochmal anwenden und erhalten $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$ die zweite Ableitung von f . Durch n -faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die n -te Ableitung $(\frac{d}{dx})^n f = f^{(n)}$.

Definition 7.33. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle offenen Teilmengen $I \subset \mathbb{R}$ sei $C^n(I)$ die Menge aller n -mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf I , und $C^\infty(I)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf I .

$$C(I) = C^0(I) \supset C^1(I) \supset \dots \supset C^n(I) \supset \dots \supset C^\infty(I)$$

Beispiel 7.34. (i) $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, weil $\exp^{(n)} = \exp$.

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $x \mapsto x^n \in C^\infty(\mathbb{R})$, weil $(x^n)^{(n)} = n!$ und $(x^n)^{(m)} = 0$ für $m > n$.

(iii) für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^{-n} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, weil $(x \mapsto x^{-n})^{(m)} =$

$$x \mapsto \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{x^{n+m}} = (-1)^m \frac{(n+m-1)(n+m-2)\dots n}{x^{n+m}}.$$

(iv) $\ln \in C^\infty((0, \infty))$ weil $\ln^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$ für $m \geq 1$ und mit $0! = 1$.

Übungsaufgabe 7.35. Zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\frac{d^n}{dx^n} f \cdot g = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ für alle $f, g \in C^n(I)$ (Verallgemeinerte Leibnizregel).

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind $C^n(I)$ und $C^\infty(I)$ Unteralgebren von $C(I)$.

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

Korollar 7.36. (i) Die Komposition von n -mal (stetig) differenzierbaren Funktionen ist wieder n -mal (stetig) differenzierbar.

(ii) Die Umkehrfunktion einer n -mal (stetig) differenzierbaren bijektiven Funktion ist n -mal (stetig) differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat. **q.e.d.**

Definition 7.37. (Taylor-Polynom) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 n -mal differenzierbar, d.h. es gibt eine offene Umgebung $O \subset I$ von x_0 , so dass die Einschränkung von f auf O in $C^{n-1}(O)$ liegt, und $f^{(n-1)}$ in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von f der Ordnung n in x_0 .

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung n in x_0 die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie f an dem Punkt x_0 . Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad n , das an der Stelle x_0 die Ableitungen $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ besitzt:

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n \implies p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \dots, p^{(n)}(x_0) = n!c_n.$$

Satz 7.38 (Taylorformel). *Sei $f \in C^n((a, b))$ auf (a, b) $n+1$ -mal differenzierbar. Dann gibt es für jedes $x_0 \neq x \in (a, b)$ ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x, x_0)$, so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad \text{gilt.}$$

Beweis: Sei $x \in (a, b)$ und $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k$ für $t \in (a, b)$. Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Außerdem sei $h(t) = (x - t)^{n+1}$ und $h'(t) = -(n+1)(x - t)^n$. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x, x_0)$ gibt mit

$$(g(x) - g(x_0))h'(\xi) = (h(x) - h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber $g(x) - g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ und $h(x) - h(x_0) = -(x - x_0)^{n+1}$. Also folgt $f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n(x - x_0)^{n+1}}{n!(n+1)(x - \xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. **q.e.d.**

Definition 7.39 (Taylorreihe). *Für $f \in C^\infty((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$ heißt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ Taylorreihe von f in x_0 .*

Für $f \in C^\infty((a, b))$ und $x_0, x \in (a, b)$ gibt es drei Möglichkeiten:

- (i) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x gegen $f(x)$.
- (ii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x , aber nicht gegen $f(x)$.
- (iii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x nicht.

Korollar 7.40. *Sei $f \in C^\infty((a, b))$ und $x \neq x_0 \in (a, b)$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 an dem Punkt x gegen $f(x)$, wenn auf $\xi \in (x_0, x)$ bzw. (x, x_0) die Folge $(\frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}|x - x_0|^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.* **q.e.d.**

Satz 7.41. *Für jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und jedes $|x_0| < R$ hat die Taylorreihe von $f(x)$ in x_0 einen Konvergenzradius nicht kleiner als $R - |x_0|$, und konvergiert auf $B(x_0, R - |x_0|)$ gegen f .*

Beweis: Wegen Beispiel 7.4 (v) stimmen bei $x_0 = 0$ die Ableitungen von f bis zur Ordnung N mit den entsprechenden Ableitungen von $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ überein. Deshalb sind $T_{n,0} = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ die Taylorpolynome von f bei $x_0 = 0$ und f ist dort die Taylorreihe. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

Definition 7.42. Eine Funktion $f \in C^\infty(I)$ heißt reellanalytisch bei x_0 , falls die Taylorreihe bei x_0 einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von x_0 gegen $f(x)$ konvergiert. Sie heißt reellanalytisch, wenn das für alle $x_0 \in I$ gilt.

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Konvergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

Korollar 7.43*. Zwei reellanalytische Funktionen $f, g \in C^\infty((a, b))$ stimmen genau dann auf (a, b) überein, wenn ihre Taylorreihen für ein $x_0 \in (a, b)$ übereinstimmen.

Beweis*: Die folgenden Mengen sind abgeschlossen und offen, also $(a, x_0]$ bzw. $[x_0, b)$:

$$\{x \in (a, x_0] \mid f(t) = g(t) \forall t \in [x, x_0]\}, \quad \{y \in [x_0, b) \mid f(t) = g(t) \forall t \in [x_0, y]\}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Beispiel 7.44. (i) Alle Polynome und konvergente Potenzreihen sind reellanalytisch. Insbesondere sind $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$ reellanalytische Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$.

(ii) Bei $x_0 \neq 0$ ist $x \mapsto \frac{1}{x}$ wegen $\frac{1}{x+x_0} = \frac{1}{x_0(1+x/x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x_0^{n+1}}$ reellanalytisch.

(iii) Bei $x_0 > 0$ ist $x \mapsto \ln x$ wegen $\ln(x+x_0) = \ln(x_0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n x_0^n}$ reellanalytisch.

(iv) Die Verkettung $x \mapsto g(f(x))$ von reellanalytischen Funktionen ist reellanalytisch: Wegen Satz 4.29 (ii) genügt es $x_0 = 0$ zu betrachten: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g(a_0 + y) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m y^m$. Dann ist wegen Satz 4.28 (iv) $g(f(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)^m$ eine auf einer Umgebung von $x = 0$ konvergente Potenzreihe. Insbesondere sind gebrochen rationale Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\tan$, $\cot$ und $x \mapsto x^\alpha$ reellanalytisch.

$$(v) \text{ Für } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \text{ gilt } f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit einem Polynom p_n vom Grad $2n$, das induktiv definiert ist durch

$$p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(p_n\left(\frac{1}{x}\right) - p'_n\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad p_0 = 1.$$

Wegen der 2. Regel von L'Hopital und der Monotonie von e^x gilt für $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\exp(-x^{-\alpha})}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0+} \exp(-x^{-\alpha} (1 + \beta \frac{\ln x}{x^{-\alpha}})) = 0.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ stetig, und wegen dem Mittelwertsatz

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Die Taylorreihe von f verschwindet bei $x_0 = 0$ mit allen Ableitungen. Also ist f bei $x_0 = 0$ nicht reellanalytisch aber auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.