

Kapitel 6

Stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

6.1 Umkehrfunktionen

Satz 6.1 (Zwischenwertsatz). Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann enthält $f[[a, b]]$ das Intervall $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$.

Beweis: Für $f(a) = f(b)$ gilt die Aussage. Für $f(a) \neq f(b)$ genügt es zu zeigen, dass $f[[a, b]]$ jede Zahl $y \in (\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\})$ enthält. Sei $A \subset [a, b]$ diejenige der beiden Mengen $f^{-1}((-\infty, y])$ und $f^{-1}([y, \infty))$, die a enthält, und B diejenige, die b enthält. Beide sind beschränkt und wegen der Stetigkeit von f abgeschlossen, also wegen Heine-Borel kompakt. Wegen $b \notin A$ ist $x = \max A$ kleiner als b . Die Folge $(x + \frac{b-x}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ liegt nicht in A also in B . Ihr Grenzwert x liegt wegen Lemma 5.4 im Abschluss von B , also in $A \cap B$. Dann ist $y = f(x)$ in $f[[a, b]]$ enthalten. **q.e.d.**

Korollar 6.2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f[I]$ ein Intervall.

Beweis: Sei $J = f[I]$. Für $a < b$ und $a, b \in J$ folgt aus dem Zwischenwertsatz $[a, b] \subset J$. Dann enthält J alle reelle Zahlen, die weder eine untere noch eine obere Schranke von J sind, also $(\inf J, \sup J)$. Dabei ist $\inf J = -\infty$ bzw. $\sup J = \infty$ wenn J keine untere bzw. obere Schranke hat. Jenachdem, ob $\min J$ bzw. $\max J$ existiert, ist dann J eines der Intervalle $(\inf J, \sup J)$, $[\min J, \sup J)$, $(\inf J, \max J]$ oder $[\min J, \max J]$. **q.e.d.**

Die Injektivität von solchen Funktionen ist äquivalent zur strengen Monotonie:

Definition 6.3 (Monotonie). Auf $X \subset \mathbb{R}$ heißt eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$

monoton wachsend, wenn $f(x) \leq f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt

streng monoton wachsend, wenn $f(x) < f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt.

monoton fallend, wenn $f(x) \geq f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt.

streng monoton fallend, wenn $f(x) > f(x')$ für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt.

Satz 6.4. Eine stetige reelle Funktion f auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn f entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

Beweis: Für eine auf einem Intervall stetige und injektive aber nicht streng monotone reelle Funktion f gibt es $a_1 < b_1$ und $a_2 < b_2$ mit $(f(b_1) - f(a_1))(f(b_2) - f(a_2)) < 0$. Dann enthält $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ drei Elemente $a < b < c$ so dass $f(b) - f(a)$, $f(c) - f(b)$ und $f(c) - f(a)$ nicht das gleiche Vorzeichen haben, also $(f(b) - f(a))(f(c) - f(b)) < 0$ gilt. Wegen dem Zwischenwertsatz liegen die $y \neq f(b)$, die sowohl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als auch zwischen $f(b)$ und $f(c)$ liegen, in $f[[a, b]] \cap f[(b, c]]$. Also ist f nicht injektiv. Umgekehrt folgt aus der strengen Monotonie die Injektivität. **q.e.d.**

Korollar 6.5. Sei f eine reelle, stetige und injektive Funktion auf einem Intervall I . Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f[I] \rightarrow I$ stetig.

Beweis: Jedes $x \in I$ besitzt eine Umgebung in I , die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakter Intervalle ist wegen dem vorangehenden Satz und Korollar 6.2 eine Umgebung von $f(x)$ in dem Intervall $f[I]$. Dann ist f^{-1} wegen Korollar 5.18 auf dieser Umgebung von $f(x)$ stetig. Also ist f^{-1} auf $f[I]$ stetig. **q.e.d.**

Beispiel 6.6. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^k$ streng monoton wachsend. Dann ist die Umkehrabbildung $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt für die Abbildung $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ mit Umkehrabbildung $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^{\frac{q}{p}}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Für negative $\frac{p}{q}$ sind diese Abbildungen von $(0, \infty)$ nach $(0, \infty)$ streng monoton fallend.

Satz 6.7. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende (fallende) reelle Funktion auf einem Intervall I . Dann ist die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f höchstens abzählbar.

Beweis*: Wir betrachten nur monoton wachsende Funktionen. Weil $(\overline{\mathbb{R} \setminus I}) \cap I$ höchstens zwei Punkte enthält, genügt es $I^\circ = (\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{R} \setminus I}) \subset I$ zu betrachten. Für $\xi \in I^\circ$ sei $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I^\circ \cap (-\infty, \xi)\}$ und $f(\xi_+) = \inf\{f(x) \mid x \in I^\circ \cap (\xi, \infty)\}$. Im Fall $f(\xi_-) = f(\xi_+)$ gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Punkte $x_-, x_+ \in I^\circ$ mit $x_- < \xi < x_+$ und

$$f(\xi_-) - \epsilon < f(x_-) \leq f(\xi_-) = f(\xi_+) \leq f(x_+) < f(\xi_+) + \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt $f(\xi_-) \leq f(\xi) \leq f(\xi_+)$. Dann gilt für alle $x \in [x_-, x_+]$ auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \leq f(x) - f(\xi) \leq f(x_+) - f(\xi_+) < \epsilon.$$

Also ist f bei solchen ξ stetig. Wenn f bei ξ stetig ist, gilt $f(\xi_-) = f(\xi) = f(\xi_+)$. Dann bestehen die Unstetigkeitsstellen in I° bestehen aus den ξ mit $f(\xi_-) < f(\xi_+)$. Wegen der Monotonie sind die offenen Intervall $(f(\xi_-), f(\xi_+))$ paarweise disjunkt. Wir wählen in jedem eine rationale Zahl und erhalten eine injektive Abbildung von den Unstetigkeitsstellen in I° nach $\mathbb{Q}$. Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{Q}$, also höchstens abzählbar. **q.e.d.**

6.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Satz 6.8 (Eigenschaften von $\exp$). **(i)** $e^0 = \exp(0) = 1$ und $e^1 = \exp(1) = e$.

(ii) $e^x > \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $x > 0$.

(iii) Für $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $e^x < e^y$ aus $x < y$.

(iv) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$ ist bijektiv.

Beweis: **(i)** und **(ii)** folgen aus der Definition.

(iii) Aus $x < y$ folgt $y - x > 0$. Dann gilt wegen **(ii)** $e^{y-x} > 1$. Wegen Satz 4.21 **(i)** und **(ii)** gilt dann $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$. Also folgt $e^x < e^y$.

(iv) Offenbar ist die Funktion wegen **(iii)** injektiv. Wegen $e > 1$ und Satz 3.4 gibt es für jedes $y \in (0, \infty)$ zwei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < y < e^m$. Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann y zum Bild von $[-n, m] \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$. **q.e.d.**

Definition 6.9 (natürlicher Logarithmus). Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$ heißt natürlicher Logarithmus: $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.

Wegen Korollar 6.5 ist der Logarithmus stetig.

Satz 6.10 (Eigenschaften von $\ln$). **(i)** $\ln(1) = 0$.

(ii) $\ln(e) = 1$.

(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y \in (0, \infty)$.

(iv) $a^r = e^{\ln(a) \cdot r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}$ und $a \in (0, \infty)$.

(v) $\ln(e^{\ln(a)x}) = x \ln(a)$ für alle $a \in (0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$.

(vi) Für $x, y \in (0, \infty)$ folgt $\ln(x) < \ln(y)$ aus $x < y$.

(vii) $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ ist bijektiv.

Beweis: **(i)** $\Leftrightarrow e^0 = 1$ und **(ii)** $\Leftrightarrow e^1 = e$ und **(iii)** $\Leftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = (e^{\ln(x)})(e^{\ln(y)})$.

(iv) Für $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $(e^{\ln(a)\frac{p}{q}})^q = e^{\ln(a)p} = a^p$ und $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$. Wegen der Eindeutigkeit der q -ten Wurzel folgt $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$.

(v) ist offensichtlich.

(vi) folgt aus **(iii)** des vorhergehenden Satzes.

(vii) folgt aus **(iv)** des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 6.11. Für alle $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x = e^{x \ln(a)}$

Satz 6.12 (Eigenschaften von a^x). **(i)** $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $a \in (0, \infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- (ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ für alle $a \in (0, \infty)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- (iii) Für $a > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x < a^y$ aus $x < y$.
- (iv) Für $0 < a < 1$ und $x, y \in \mathbb{R}$ folgt $a^x > a^y$ aus $x < y$.
- (v) Für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ist $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$ bijektiv und stetig.

Beweis:(i) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)+y\ln(a)} = e^{x\ln(a)}e^{y\ln(a)} = a^x a^y$.

(ii) $(a^x)^y = e^{y\ln(a^x)} = e^{y \cdot x\ln(a)} = e^{xy\ln(a)} = a^{xy}$.

(iii) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$. Also folgt $x\ln(a) < y\ln(a)$ und $a^x < a^y$ aus $x < y$.

(iv) Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$. Also folgt $x\ln(a) > y\ln(a)$ und $a^x > a^y$ aus $x < y$.

(v) Für $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ ist $\ln(a) \neq 0$. Also ist $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(a)x$ bijektiv und stetig, und damit auch $\mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto \exp(\ln(a)x)$. **q.e.d.**

Definition 6.13 (des Logarithmus zur Basis a). Für alle $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ sei $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ die Umkehrfunktion von a^x .

Satz 6.14 (Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a). (i) $\log_a(1) = 0$

(ii) $\log_a(a) = 1$

(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

(iv) Für $a > 1$ und $x, y \in (0, \infty)$ folgt $\log_a(x) < \log_a(y)$ aus $x < y$.

(v) Für $0 < a < 1$ und $x, y \in (0, \infty)$ folgt $\log_a(x) > \log_a(y)$ aus $x < y$.

(vi) $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$ ist bijektiv und stetig.

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von $\ln$.

q.e.d.

6.3 Trigonometrische Funktionen

Satz 6.15. (i) Für alle $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ gilt $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

(ii) Für alle $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$ gilt $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$.

(iii) $\cos : [0, \sqrt{6}] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend.

(iv) $\cos$ hat auf $[0, 2]$ genau eine Nullstelle, die wir mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen.

(v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$.

(vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n$ $\sin(n\pi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(vii) $\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(viii) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x)$ und $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

(ix) $\cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = -(-1)^n \sin(x)$ und $\sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n \cos(x)$.

(x) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$ ist streng monoton steigend und bijektiv.

(xi) $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend und bijektiv.

Beweis:(i) Für alle $x \in [-5, 5]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $0 \leq \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$. Also ist für $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ die Folge $\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-5, 5] \setminus \{0\}$ folgt dann $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ wie im Beweis zu Satz 4.14.

(ii) Für $x \in [-6, 6]$ und $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt $0 \leq \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} < 1$. Also ist für $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$ die Folge $\left(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\right)_{k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-6, 6] \setminus \{0\}$ folgt wieder $1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$ wie im Beweis von Satz 4.14.

(iii) Für $x, y \in [0, \sqrt{6}]$ mit $x < y$ gilt $0 < \frac{y+x}{2} \leq \sqrt{6}$. Aus dem Additionstheorem und (ii) folgt $\cos(x) - \cos(y) = \cos\left(\frac{y+x}{2} - \frac{y-x}{2}\right) - \cos\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$.

(iv) $\sin$ und $\cos$ sind wegen Beispiel 5.21 stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen (i) ist $\cos(2) < 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in $[0, 2]$ gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.

(v) Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ folgt aus (iv) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und aus (ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Also gilt $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Dann folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$.

(vi) Wegen (v) folgt (vi) aus der Eulerschen Formel:

$$\cos(n\pi) + i \sin(n\pi) = \exp(ni\pi) = \exp(2n\frac{1}{2}i\pi) = (i)^{2n} = (-1)^n.$$

(vii) Wegen (v) und (vi) folgt (vii) aus der Eulerschen Formel:

$$\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) + i \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)i\pi\right) = \exp(ni\pi) \exp(i\frac{\pi}{2}) = (-1)^n i.$$

(viii) Wegen (vi) folgt (viii) aus der Eulerschen Formel:

$$\cos(x + n\pi) + i \sin(x + n\pi) = \exp(ix + ni\pi) = \exp(ix)(-1)^n = (-1)^n(\cos(x) + i \sin(x)).$$

(ix) Wegen (vii) folgt (ix) aus der Eulerschen Formel:

$$\cos\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) + i \sin\left(x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \exp(ix) \exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)i\pi\right) = (-1)^n(i \cos(x) - \sin(x)).$$

(x) Aus (ix) folgt $\sin(x) = \begin{cases} -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ -\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$

Dann folgt (x) aus (iii).

(xi) Aus (viii) folgt $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi - x) & \text{für } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$

Dann folgt (xi) aus (iii).

q.e.d.

Die Umkehrfunktionen von (xi) und (x) heißen

Arcuscosinus	$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$	$x \mapsto \arccos(x),$
Arcussinus	$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$	$x \mapsto \arcsin(x).$

Arcuscosinus ist wegen (xi) streng monoton fallend und Arcussinus wegen (x) streng monoton wachsend. Beide sind wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen (ix) gilt $\sin(-x) = -\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ und $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Definition 6.16 (Tangens und Cotangens).

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \cot : \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

$$\text{Beachte } \tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x) \text{ und } \cot(x + \pi) = \cot(x).$$

Satz 6.17. (i) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.

(ii) $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot(x)$ ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.

Beweis: Auf $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist $\sin$ streng monoton steigend und $\cos$ streng monoton fallend und beide positiv. Also ist $\tan$ streng monoton steigend und positiv. Aus $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt, dass $\tan$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend ist.

Für $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ gilt $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ und für $x \notin \pi\mathbb{Z}$ wegen Satz 6.15 (ix) $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$. Also ist $\cot$ auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend.

Beide Funktionen $\tan$ und $\cot$ sind wegen Beispiel 5.19 (iii) stetig. Dann sind die Folgen $(\tan(\frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}, (-\tan(\pi - \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}, (\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(-\cot(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ identische streng monoton fallende positive Nullfolgen. Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tan(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cot(\pi - \frac{1}{n}) = -\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cot(\frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}) = \infty.$$

Also sind $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ wegen Satz 6.1 surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktionen von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ heißen

$$\begin{aligned} \text{Arcustangens} : \mathbb{R} &\rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), & x &\mapsto \arctan(x), \\ \text{Arcuscotangens} : \mathbb{R} &\rightarrow (0, \pi), & x &\mapsto \operatorname{arccot}(x). \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind wegen Satz 6.17 streng monoton und wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen Satz 6.15 (ix) gilt $\cot(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(-x)$ and $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

6.4 Fundamentalsatz der Algebra

Wir übertragen unsere Erkenntnisse auf die komplexe Exponentialfunktion.

Satz 6.18 (Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$). *Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf Addition von $2\pi n$ eindeutig und heißt Argument von z .

Beweis: Der Fall $z = 0$ ist trivial. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $y \geq 0$ sei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arccos(\frac{x}{r}) \in [0, \pi]$. Dann gilt $x = r \cos(\varphi)$ und $r \sin(\varphi) \geq 0$. Aus $\frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$ folgt $y = r \sin(\varphi)$. Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = x + iy.$$

Für $y < 0$ sei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = -\arccos(\frac{x}{r}) \in [-\pi, 0]$. Wegen $x = r \cos(-\varphi) = r \cos(\varphi)$ und $r \sin(\varphi) \leq 0$ folgt wieder

$$z = re^{i\varphi} = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = x + iy.$$

Für $(r, \varphi), (s, \vartheta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ folgt $r = |re^{i\varphi}| = |se^{i\vartheta}| = s$ aus $re^{i\varphi} = se^{i\vartheta}$ und für $r = s \neq 0$ auch $e^{i\varphi}e^{-i\vartheta} = e^{i(\varphi-\vartheta)} = 1$, was äquivalent ist zu $\varphi - \vartheta = 2\pi n$. **q.e.d.**

Die Multiplikation mit $e^{i\varphi}$ wirkt auf $z = x + iy$ wie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Diese lineare Abbildung der komplexen Zahlenebene interpretieren wir als Drehung, weil sie die Länge $\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |e^{i\varphi}z|$ und das Skalarprodukt erhält und Determinante 1 hat. Weil sie 1 auf $e^{i\varphi}$ abbildet, entspricht sie dem Winkel zwischen 1 und $e^{i\varphi}$. Im rechtwinkligen Dreieck ist mit diesem Winkel und auf 1 normierter Hypothenuse $\cos(\varphi)$ die gerichtete Länge der Ankathete und $\sin(\varphi)$ die gerichtete Länge der Gegenkathete.

Für kleine $\varphi > 0$ gilt $\varphi - \frac{\varphi^3}{6} < \sin(\varphi) < L(\varphi) < \sin(\varphi) + 1 - \cos(\varphi) < \varphi + \frac{\varphi^2}{2}$ für die Länge $L(\varphi)$ des Kreissegmentes zwischen 1 und $e^{i\varphi}$. Wir unterteilen dieses Kreissegment in n gleichgroße Kreissegmente: $e^{i\varphi} = (e^{i\frac{\varphi}{n}})^n$. Das ergibt $L(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} nL(\frac{\varphi}{n}) = \varphi$. Also entspricht φ einem Winkel, dessen Kreissegment im Einheitskreis die Länge φ hat.

Korollar 6.19. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv und $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt $e^z = e^x e^{iy}$. Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.18 und der Bijektivität von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, Satz 6.8 (iv). **q.e.d.**

Korollar 6.20. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.

Beweis: Seien (r, φ) die Polarkoordinaten von z . Dann müssen die Polarkoordinaten $(s, \vartheta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ der Lösungen von $w^n = z$ die Gleichungen $n\vartheta = \varphi + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $s^n = r$ erfüllen. Also sind die Lösungen gegeben durch $s = \sqrt[n]{r}$ und $\vartheta_m = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$, wobei zwei Lösungen (s, ϑ_m) und $(s, \vartheta_{m'})$ genau dann übereinstimmen, wenn $\frac{m-m'}{n} \in \mathbb{Z}$. Also ergeben $m = 0, \dots, n-1$ alle Lösungen. **q.e.d.**

Satz 6.21 (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine Nullstelle auf $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $z \mapsto |p(z)|$ ein Minimum z_0 hat. Danach zeigen wir mit dem Seziellfall in dem vorangehenden Korollar, dass beim Minimum $p(z_0) = 0$ gilt.

Für $|z| \geq R = 1 + 2 \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + 2 \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(z)}{z^n} \right| &= \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| = \left| -\frac{a_{n-1}}{z} - \dots - \frac{a_0}{z^n} \right| - \left| -a_n \left(\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right) \right| \\ &\geq |a_n| - |a_n| \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \geq |a_n| \left(1 - \frac{\left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \dots + \left| \frac{a_0}{a_n} \right|}{|z|} \right) > |a_n| \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n \geq \frac{|a_n|}{2} |z| > \frac{|a_n|}{2} 2 \frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0| = |p(0)|$ für alle $z \notin B(0, R)$. Auf der kompakten Menge $\overline{B(0, R)}$ nimmt $z \mapsto |p(z)|$ wegen Satz 5.26 das Minimum bei einem z_0 an. Dieses liegt in $B(0, R)$ und ist dann das Minimum auf ganz $z \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen jetzt $p(z_0) = 0$. Andernfalls sei $p(y + z_0) = b_n y^n + \dots + b_0$ das entsprechende Polynom in $y = z - z_0$ mit $b_n = a_n \neq 0$ und $b_0 = p(z_0) \neq 0$. Sei m das kleinste $m > 0$ mit $b_m \neq 0$. Für $|y| \leq r = \frac{1}{1 + 2 \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| + \dots + 2 \left| \frac{b_n}{b_m} \right|} \leq 1$ gilt dann

$$|b_{m+1} y^{m+1} + \dots + b_n y^n| \leq |b_m| |y|^m \left(\left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| |y| + \dots + \left| \frac{b_n}{b_m} \right| |y| \right) \leq \frac{|b_m| |y|^m}{2}.$$

Also gilt $|p(z_0 + y)| \leq |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m| |y|^m}{2} = |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m y^m|}{2}$.

Sei w eine Lösung der Gleichung $b_m w^m = -b_0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $|tw| \leq r$

$$|p(z_0 + tw)| \leq |b_0 + b_m t^m w^m| + \frac{|b_m t^m w^m|}{2} = |(1 - t^m) b_0| + \frac{|t^m b_0|}{2} = \left(|1 - t^m| + \frac{|t|^m}{2} \right) |b_0|.$$

Insbesondere gilt $|p(z_0 + tw)| \leq (1 - \frac{1}{2} |t|^m) |b_0| < |p(z_0)|$ für alle $0 < t \leq \min \left\{ 1, \frac{r}{|w|} \right\}$. Also sind alle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) \neq 0$ keine Minima von $z \mapsto |p(z)|$. **q.e.d.**

Korollar 6.22. *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

Beweis durch vollständige Induktion: **(i)** für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Sei p ein beliebiges Polynom $(n+1)$ -ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle bei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir schreiben p als $a_{n+1}(u + z_0)^{n+1} + \dots + a_1(u + z_0) + a_0 = b_{n+1}u^{n+1} + \dots + b_1u + p(z_0)$, und erhalten p als Produkt von $u = z - z_0$ mit dem Polynom $b_{n+1}(z - z_0)^n + \dots + b_1$, das wegen der Induktionsvoraussetzung in ein Produkt von Polynomen ersten Grades zerfällt. **q.e.d.**