

Kapitel 5

Stetigkeit

5.1 Teilmengen von $\mathbb{K}$

In diesem Abschnitt betrachten wir Teilmengen X von $\mathbb{K}$, also von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Der Absolutbetrag $|x - y|$ der Differenz zweier Elemente $x, y \in X$ definiert einen Abstand. Wir hatten in den Sätzen 2.22 und 2.61 folgende Eigenschaften hergeleitet:

- (i) Für alle $x, y \in X$ ist $|x - y| \geq 0$ und $|x - y| = 0$ ist äquivalent zu $x = y$ (Positivität).
- (ii) Für alle $x, y \in X$ ist $|x - y| = |y - x|$ (Symmetrie).
- (iii) Für alle $x, y, z \in X$ ist $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ (Dreiecksungleichung).

Definition 5.1 (offener Ball, Umgebung, offene Menge). *In der Menge $X \subset \mathbb{K}$ heißt $B(x, r) = \{y \in X \mid |x - y| < r\}$ offener Ball mit Zentrum $x \in X$ und Radius $r > 0$. Eine Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist eine Teilmenge $U \subset X$, die für ein $\epsilon > 0$ den Ball $B(x, \epsilon)$ enthält. Eine offene Menge $O \subset X$ ist eine Teilmenge, die eine Umgebung aller ihrer Punkte ist, d.h. für alle $x \in O$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B(x, \epsilon) \subset O$.*

Beispiel 5.2. *In $\mathbb{R}$ bestehen die Bälle $B(x, r)$ aus den Intervallen $(x - r, x + r)$. In $\mathbb{C}$ bestehen die Bälle $B(x, r)$ aus Kreisscheiben um x mit Radius r ohne den Rand.*

In $[0, \infty)$ ist $[0, 1)$ eine Umgebung von 0, weil sie der offene Ball $B(0, 1)$ ist. In $\mathbb{R}$ ist $[0, 1)$ keine Umgebung von 0, weil sie keinen Ball $B(0, r)$ mit $r > 0$ von $\mathbb{R}$ enthält.

Alle offene Bälle $B(x, r)$ sind offenbar Umgebungen von x . Sei $y \in B(x, r)$. Dann ist $|x - y| < r$. Sei $z \in B(y, r - |x - y|)$. Dann gilt $|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < r$, also auch $B(y, r - |x - y|) \subset B(x, r)$. Deshalb sind die offenen Bälle offene Mengen.

Insbesondere ist $[0, 1)$ in $[0, \infty)$ offen aber in $\mathbb{R}$ nicht.

Offenbar ist eine beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen. Seien O und O' zwei offene Mengen und $x \in O \cap O'$. Dann gibt es $r > 0$ und $r' > 0$ so dass $B(x, r) \subset O$ und $B(x, r') \subset O'$. Also ist $B(x, \min\{r, r'\}) = B(x, r) \cap B(x, r') \subset O \cap O'$. Also ist $O \cap O'$ offen. Damit ist auch die Schnittmenge von endlich vielen offenen Mengen offen.

Definition 5.3 (abgeschlossene Mengen, Abschluss). Sei $X \subset \mathbb{K}$. Die abgeschlossenen Teilmengen von X sind die Komplemente der offenen. Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ ist die Schnittmenge aller abgeschlossenen Teilmengen, die A enthalten.

Wegen der Regel von de Morgan, sind beliebige Schnitte und endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Teilmengen von X abgeschlossen. Für jede Teilmenge $A \subset X$ ist deshalb $\bar{A}$ abgeschlossen und genau dann gleich A , wenn A abgeschlossen ist.

Für eine Teilmenge $A \subset X$ gehört $x \in X$ genau dann zu $\bar{A}$, wenn es in X keinen offene Teilmenge gibt, die x enthält und deren Schnittmenge mit A leer ist. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die offenen Bälle $B(x, \frac{1}{n})$ in X ein Element a_n aus A enthalten, oder auch dazu, dass es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A gibt, die gegen x konvergiert. Dabei konvergiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen von X in X , wenn sie in $\mathbb{K}$ konvergiert und der Grenzwert in X liegt. Damit haben wir gezeigt:

Lemma 5.4. Der Abschluss $\bar{A}$ einer Teilmenge $A \subset X$ besteht aus den Grenzwerten von allen Folgen in A , die in X konvergieren. $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte von allen Folgen in A , die in X konvergieren, in A liegen. **q.e.d.**

Wegen Satz 3.5 ist in $\mathbb{K}$ der Abschluss der offenen Bälle $\overline{B(x, r)} = \{y \mid |y - x| \leq r\}$.

5.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert, dann auch in $\mathbb{K}$. Deshalb gilt

Satz 5.5. In $X \subset \mathbb{K}$ ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge. **q.e.d.**

Definition 5.6. $X \subset \mathbb{K}$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Wegen dem Vollständigkeitsaxiom sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ vollständig. Wegen Lemma 5.4 ist $A \subset \mathbb{K}$ genau dann vollständig, wenn A in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist.

Weil jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist, sind die reellen Zahlen der Abschluss der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Anstelle unserer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen können wir also die reellen Zahlen auch aus den rationalen Zahlen konstruieren als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen, wobei zwei Cauchyfolgen als äquivalent gelten, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

Definition 5.7 (Kompakte Mengen). Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißt kompakt, wenn jede Folge in X eine in X konvergente Teilfolge besitzt.

Definition 5.8. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ heißt beschränkt, wenn für ein $x \in X$, die Menge der Abstände $\{|x - y| \mid y \in X\}$ beschränkt ist.

Wegen der Dreiecksungleichung ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass für jedes $x \in \mathbb{K}$ die Menge der Abstände $\{|x - y| \mid y \in X\}$ beschränkt ist.

Satz 5.9 (Heine-Borel). *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist.*

Beweis: Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano Weierstraß besitzt jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einer beschränkten Menge $X \subset \mathbb{K}$ eine in $\mathbb{K}$ konvergente Teilfolge. Der Grenzwert einer Folge in einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$, die in $\mathbb{K}$ konvergiert, muss in X liegen. Wegen Lemma 5.4 ist dann eine beschränkte Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Wenn es für endlich viele paarweise disjunkte Bälle $B(x_1, 2), \dots, B(x_n, 2)$ einer Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ kein $x_{n+1} \in X$ gibt, so dass auch $B(x_1, 2), \dots, B(x_{n+1}, 2)$ paarweise disjunkt sind, dann ist X in $B(x_1, 4) \cup \dots \cup B(x_n, 4)$ enthalten und beschränkt. Also gibt es in unbeschränkten Mengen $X \subset \mathbb{K}$ Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit paarweise disjunkten Bällen $B(x_n, 2)$. Für $x \in X$ folgt $B(x, 1) \subset B(x_n, 2)$ aus $x_n \in B(x, 1)$. Also hat eine solche Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X keinen Häufungspunkt. **q.e.d.**

Korollar 5.10. *Teilmengen $A \subset X$ einer kompakten Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ sind genau dann kompakt, wenn sie in X abgeschlossen sind.*

Beweis: Teilmengen A einer beschränkten Menge $X \subset \mathbb{K}$ sind beschränkt. In einer abgeschlossenen Teilmenge X von $\mathbb{K}$ konvergiert wegen Lemma 5.4 eine Folge genau dann, wenn sie in $\mathbb{K}$ konvergiert. Außerdem ist $A \subset X$ genau dann in X abgeschlossen, wenn A in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist. Dann folgt die Aussage aus Satz 5.9. **q.e.d.**

Korollar 5.11. *Die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ besitzen Minimum und Maximum.*

Beweis: Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt und nicht leer. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\sup A - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von A und $\inf A + \frac{1}{n}$ keine untere Schranke. Deshalb gibt es ein $a_n \in (\sup A - \frac{1}{n}, \sup A] \cap A$ und ein $b_n \in [\inf A, \inf A + \frac{1}{n}) \cap A$. Es folgt $\lim a_n = \sup A \in \bar{A}$ und $\lim b_n = \inf A \in \bar{A}$. Für $A = \bar{A}$ besitzt A ein Minimum und ein Maximum. **q.e.d.**

Beispiel 5.12. *In $\mathbb{K}$ sind alle abgeschlossenen Bälle $\overline{B(x, r)}$ für $r \geq 0$ kompakt. Dasselbe gilt in $X \subset \mathbb{K}$ genau dann, wenn X in $\mathbb{K}$ abgeschlossen ist.*

5.3 Stetigkeit

Definition 5.13. *Seien X und Y jeweils eine Teilmenge entweder von $\mathbb{R}$ oder von $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$ heißt stetig in $x \in X$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $y \in X$ gilt, die $|x - y| < \delta$ erfüllen. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.*

Stetig im Punkt x heißt also, dass die Abstände $|f(x) - f(y)|$ immer dann beliebig klein ($< \epsilon$) werden, wenn die Abstände $|x - y|$ hinreichend klein ($< \delta(\epsilon)$) gewählt sind.

Satz 5.14. *Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist folgendes äquivalent: (i) f ist stetig in x .*

(ii) Das Urbild jeder Umgebung von $f(x)$ in Y ist eine Umgebung von x in X .

(iii) Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X gegen x konvergiert, dann konvergiert $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Umgebungen von x bzw. $f(x)$ sind Mengen, die $B(x, \delta)$ mit $\delta > 0$ bzw. $B(f(x), \epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ enthalten. Also ist (ii) äquivalent dazu, dass das Urbild jeder Menge, die $B(f(x), \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ enthält, $B(x, \delta)$ mit $\delta > 0$ enthält und dazu, dass $f^{-1}[B(f(x), \epsilon)]$ für alle $\epsilon > 0$ ein $B(x, \delta)$ mit $\delta > 0$ enthält. Das ist äquivalent zu (i).

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren genau dann gegen x bzw. $f(x)$, wenn jede Umgebung von x bzw. $f(x)$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder enthält. Wenn also (ii) gilt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann konvergiert $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ und (iii) folgt aus (ii). Wenn umgekehrt das Urbild einer Umgebung von $f(x)$ keine Umgebung von x enthält, dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$, so dass $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ im Komplement der Umgebung von $f(x)$, also für ein $\epsilon > 0$ nicht in $B(f(x), \epsilon)$ liegt. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x , aber $f(x_n)$ nicht gegen $f(x)$. **q.e.d.**

Korollar 5.15. Für eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist folgendes äquivalent: (i) f ist stetig.

(ii) Für in X konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$.

(iii) Das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y ist offen in X .

(iv) Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von Y ist abgeschlossen in X .

Beweis: Wegen Satz 5.14 sind (i) und (ii) äquivalent. Weil eine Menge genau dann offen ist, wenn sie eine Umgebung von allen ihren Punkten ist, folgt (iii) mit dem Satz 5.14 aus (i). Weil jede Umgebung eines Punktes eine offene Umgebung enthält, folgt (i) mit dem Satz 5.14 aus (iii). Weil nun die abgeschlossenen Mengen gerade die Komplemente der offenen Mengen sind und das Urbild eines Komplementes gerade gleich dem Komplement des Urbildes ist, ist (iii) zu (iv) äquivalent. **q.e.d.**

Korollar 5.16. Die Komposition zweier Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ ist in allen $x \in X$ stetig, für die f in x , und g in $f(x)$ stetig ist.

Beweis: Sei f stetig in $x \in X$, g stetig in $f(x)$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gegen x . Dann gilt $g(f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n))$. **q.e.d.**

Korollar 5.17. Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist kompakt.

Beweis: Für jede Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Bild $f[A]$ von $A \subset X$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn A kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert wegen der Stetigkeit von f . Also besitzt jede Folge in $f[A]$ eine konvergente Teilfolge. **q.e.d.**

Korollar 5.18. *Sei f eine bijektive stetige Abbildung von einer kompakten Teilmenge X auf eine Teilmenge Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist die Umkehrabbildung stetig.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Korollar ist das Bild $f[X] = Y$ kompakt und wegen Korollar 5.10 das Bild $f[A]$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen. Wegen $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ folgt die Aussage aus Korollar 5.15 (iv). **q.e.d.**

Beispiel 5.19. (i) *Auf jeder Teilmenge $X \subset \mathbb{K}$ ist die identische Abbildung $\mathbb{1}_X$ stetig.*
(ii) *Die konstante Abbildung, die alle $x \in X$ auf einen Punkt y abbildet ist stetig.*
(iii) *Aus den Rechenregeln für Folgen Satz 3.5 folgt, dass für jede Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und alle (bei $x \in X$) stetigen Abbildungen $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ auch die Abbildung*

$$f + g : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x) + g(x) \quad f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

(bei x) stetig ist. Das gilt auch (bei $x \in X$ bzw. $x \in X \setminus f^{-1}[\{0\}]$) für die Abbildungen

$$-f : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto -f(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{f} : X \setminus f^{-1}[\{0\}] \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{f(x)}.$$

Definition 5.20 (Gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitzstetigkeit). *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$ zwischen den beiden Teilmengen X und Y jeweils von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf einer Teilmenge $A \subset X$, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in A$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Die Abbildung heißt lipschitzstetig auf A , wenn es eine Konstante $L > 0$ (Lipschitzkonstante) gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in A$ gilt.*

Beispiel 5.21. (i) *Eine Potenzreihenfunktion $f : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$ mit Konvergenzradius R ist nach Satz 4.28 (iv) für alle $0 < r < R$ auf $B(0, r)$ lipschitzstetig. Auf der Vereinigung $B(0, R) = \bigcup_{0 < r < R} B(0, r)$ der offenen Bälle $B(0, r)$ ist f dann stetig.*
(ii) *Wegen Korollar 2.20 und Satz 2.59 (iv) ist $x \mapsto |x|$ lipschitzstetig mit $L = 1$.*

Offenbar ist jede lipschitzstetige Abbildung auch gleichmäßig stetig und jede gleichmäßig stetige Abbildung auch stetig. Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz 5.22. *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ von einer kompakten Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auf eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{K}$ ist genau dann stetig, wenn sie gleichmäßig stetig ist.*

Beweis: Wenn f nicht gleichmäßig stetig ist, dann gibt es für ein $\epsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in X$ und $y_n \in X$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Weil X kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in X konvergente Teilfolge, also mindestens einen Häufungspunkt $x \in X$. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ konvergiert die entsprechende Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gegen x . Wegen $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ konvergieren die entsprechenden Teilfolgen von $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht beide gegen $f(x)$. Also ist f bei x nicht stetig.

Wenn f umgekehrt gleichmäßig stetig ist, dann ist f auch stetig. **q.e.d.**

Definition 5.23. Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X nach $\mathbb{K}$ heißt

punktweise konvergent, wenn die Folgen $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in X$ konvergieren.

Die Grenzwerte definieren eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

gleichmäßig konvergent, wenn es eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x)$ gibt, und für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für $n \geq N$ und $x \in X$ gilt.

Gleichmäßig konvergente Folgen sind mit dem gleichen Grenzwert f punktweise konvergent. Es gibt punktweise konvergente Folgen, die nicht gleichmäßig konvergieren:

Beispiel 5.24. Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ konvergiert wegen Satz 3.4 punktweise gegen die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - 1/m)^n = 1$ und damit $\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{x^n \mid x \in [0, 1)\} = 1$. Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f .

Definition 5.25. Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Die Menge aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $C(X, \mathbb{K})$. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto f(x)$ heißt beschränkt, wenn $f[X]$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$ ist. $B(X, \mathbb{K})$, bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen auf X . $C(X, \mathbb{K})$ und $B(X, \mathbb{K})$ sind offenbar $\mathbb{K}$ -Algebren. Auf $B(X, \mathbb{K})$ bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ folgende Abbildung:

$$\|\cdot\|_\infty : B(X, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Satz 5.26. Auf einer kompakten Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ sind alle $f \in C(X, \mathbb{K})$ beschränkt. Für $f \in C(X, \mathbb{R})$ besitzt $f[X]$ ein Minimum und ein Maximum.

Beweis: Wegen Satz 5.17 ist das Bild jeder kompakten Teilmenge X von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ unter einer stetigen Abbildung kompakt und wegen Heine-Borel beschränkt. Für reelle Funktionen besitzt es wegen Korollar 5.11 ein Maximum und ein Minimum. **q.e.d.**

Dieser Satz hat viele Anwendungen, z.B. den Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 5.27. Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann liegt der Grenzwert f einer gleichmäßig konvergenten Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C(X, \mathbb{K})$ auch in $C(X, \mathbb{K})$.

Beweis: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein N , so dass $|f(y) - f_n(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \geq N$ und alle $y \in X$ gilt. Dann gibt es für jedes $x \in X$ ein $\delta > 0$, so dass $|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $y \in X$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Dann folgt für diese x und y

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < \epsilon. \quad \mathbf{q.e.d.}$$