

Analysis I

12. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

24. November 2025

12.1. Die zwei Wertsätze.

- (a) Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das Polynom $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ und seien $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [1, 3]$ und $I_3 = [3, 4]$ drei Intervalle.

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/calculator/z0srfut8cd>

- (i) Berechne $p'(x)$ und bestimme die lokalen Extrema von p . (1 Punkt)
- (ii) Erkläre mit Hilfe des Zwischenwertsatzes und Monotonie, warum p in jedem der drei Intervalle I_1 , I_2 und I_3 genau eine Nullstelle besitzt. (2 Punkte)
- (b) Ein Auto fährt für eine Zeit $T > 0$ auf einer Strecke, wobei die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt die Höchstgeschwindigkeit $V > 0$ nicht überschreitet. Beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass die zurückgelegte Strecke höchstens $V \cdot T$ beträgt. (1 Punkt)
- (c) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 1$ und $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $f(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. (2 Punkte)
[Hinweis: Betrachte die Funktion $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$.]

12.2. Achtung Die Kurve!

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

Es ist wahrscheinlich altmodisch, eine Kurve selbst zu skizzieren; es gibt Desmos. Die Aufgabe ist aber hilfreich, um die Bedeutungen der Ableitungen zu verstehen. Genauso müssen Kinder lernen zu addieren, auch wenn es Taschenrechnern gibt.

- (a) Berechne $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und zeige, dass -1 und 1 die kritischen Punkte von f sind. (2 Punkte)
- (b) Entscheide für die kritischen Punkte von f jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beidem handelt. (Benutze Korollar 7.17) (2 Punkte)
- (c) Untersuche, ob f auf den Intervallen $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ und $[1, \infty)$ jeweils monoton wachsend, monoton fallend oder keines von beidem ist. (1 Punkt)
- (d) Untersuche, ob f auf den Intervallen $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[-\sqrt{3}, 0]$, $[0, \sqrt{3}]$ und $[\sqrt{3}, \infty)$ jeweils konvex oder konkav ist. (2 Punkte)
- (e) Bestimme die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. (1 Punkt)
- (f) Skizziere den Graphen von f . (1 Punkt)

- (g) Untersuche mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse, ob die Funktion f ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt und bestimme gegebenenfalls, an welchen Stellen diese angenommen werden. (1 Punkt)

12.3. Taylorreihen.

Die durch $f(x) := \sqrt{1+x}$ definierte Funktion f sei auf einer geeigneten Umgebung X von $x_0 := 0$ definiert.

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/calculator/fe6pah3gsm>

- (a) Rechne die ersten drei Ableitungen von f in 0 aus. (1 Punkt)
- (b) Nutze das Taylorpolynom dritter Ordnung, um $\sqrt{2}$ zu approximieren. (1 Punkt)
- (c) Zeige durch Induktion, dass

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k},$$

für $k \geq 2$. (2 Punkte)

- (d) Bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe. (2 Bonuspunkte)