Analysis I
11. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie 17. November 2025

11.1. The bus that couldn't slow down.

Es gibt einen Bus, dessen zurückgelegte Strecke entlang seiner Route durch die Funktion

$$A(t) = 0.1t^2$$

beschrieben wird, wobei t in Sekunden und A in Metern gemessen wird.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 berechnet man als die Änderung der Strecke $A(t_2) - A(t_1)$, geteilt durch die verstrichene Zeit $t_2 - t_1$.

(a) Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in der zweiten Minute, also zwischen $t_1 = 60$ und $t_2 = 120$? *(1 Punkt)*

(b) Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in der 61. Sekunde, also zwischen $t_1 = 60$ und $t_2 = 61$? *(1 Punkt)*

(c) Finde eine Formel für die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t_1 = 60$ und $t_2 = 60 + h$. *(1 Punkt)*

(d) Was hat Durchschnittsgeschwindigkeit mit Ableitungen zu tun? *(1 Bonuspunkt)*

11.2. Differenzenquotient.

Rechne die Ableitungen im gegebenen Punkt mit Hilfe von

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(a) $f(x) = x^2$ in $a_0 = 2$. *(1 Punkt)*

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ in $x_0 = 1$. *(2 Punkte)*
[Tipp. Multipliziere mit $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$.]

(c) $f(x) = \exp(x)$ in $x_0 = 0$. *(2 Punkte)*
[Tipp. Potenzreihe.]

11.3. Strenge Regeln.

Rechne die Ableitungen mit den Rechenregel aus Schnitt 7.2.

(a) $f(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3$. *(1 Punkt)*

(b) $f(x) = x \sin x$. *(1 Punkt)*

(c) $f(x) = \frac{\exp(x)}{x}$. *(1 Punkt)*

(d) $f(x) = \ln(1 + x^2)$. *(1 Punkt)*

(e) $f(x) = \sqrt{x}$, mit Satz 7.7 (Ableitung der Umkehrfunktion). *(1 Punkt)*

11.4. Differenzierbarkeit.

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir setzen weiter voraus, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen $c \in (a, b)$ konvergiert und $x_n \neq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeige, $f(c) = f'(c) = 0$. *(3 Punkte)*

[Eine Nullstelle von f, die zugleich Nullstelle von f' ist, bezeichnet man auch als *Nullstelle höherer Ordnung*.]

11.5. Ab ins Krankenhaus.

Prüfe, ob diese Grenzwerte mit dem Regel von L'Hôpital ausgerechnet werden können, und bestimme die Grenzwerte. Ohne Beweis darf man

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ und } \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

verwenden.

(a) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$. *(2 Punkte)*

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\tan(2x)}$. *(2 Punkte)*

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *(1 Punkt)*

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$. *(2 Punkte)*