Analysis I
10. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie 10. November 2025

10.1. Spielwiese der Stetigkeit.

(a) Zeige durch Anwendung der (ε, δ)-Definition der Stetigkeit (Definition 5.13), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$$

an der Stelle $x = 2$ stetig ist. *(2 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/3ljldu3qgy

(b) Zeige durch Anwendung der (ε, δ)-Definition der Stetigkeit, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

an die Stelle $x = 0$ nicht stetig ist. *(2 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/xbl1v22eme

(c) Betrachte die Folge $x_n = -n^{-1}$. Vergleiche (für g aus (b))

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) \qquad \text{und} \qquad g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

(1 Punkt)

(d) Seien $0 < \varepsilon < 1$ und $B(0, \varepsilon)$ eine offene Umgebung von 0. Beschreibe das Urbild $g^{-1}[B(0, \varepsilon)]$ (für g aus (b)). Untersuche, ob es offen und/oder abgeschlossen ist. *(2 Punkte)*

(e) Seien $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [b, c) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(b) = g(b)$. Definiere

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \leq b \\ g(x) & \text{falls } x \geq b. \end{cases}$$

Sie ist wohl-definiert in $x = b$, da f und g dort übereinstimmen. Beweise, dass h in $x = b$ stetig ist. *(2 Punkte)*

10.2. Stetigkeiten.

(a) Zeige, dass die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

stetig ist, aber nicht gleichmäßig stetig. *(3 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/ktdfwcez3m

(b) Zeige, dass die Funktion

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

stetig ist, aber nicht Lipschitzstetig. *(3 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/npf6hw56hl

10.3. Punktweise oder Gleichmäßig Konvergent.

Wir definieren die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 2n^2x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x & \text{falls } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Weil 0 und $2n^2x$ in $x = 0$, usw, übereinstimmen, wissen wir, dass jede f_n stetig ist.

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/3ho4kos1vf

(a) Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. *(2 Punkte)*

(b) Untersuche, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist. *(3 Punkte)*
[Tipp: Bestimmen Sie zuerst die einzig mögliche Grenzwertfunktion f für den gleichmäßigen Grenzwert der (f_n), und finde sodann für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x \in \mathbb{R}$, so dass $|f_n(x) - f(x)|$ maximal wird.]