Analysis I
9. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie 3. November 2025

9.1. Über den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus.

Für $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

(a) Schreiben Sie $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ jeweils als Potenzreihe in $x \in \mathbb{K}$. *(2 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{K}$, dass $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. *(2 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/vglj4wh3q9

9.2. Die kalte Erde.

Bestimme, mit Polardarstellung, alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = -1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. *(3 Punkte)*

9.3. 0111000000101101011000010110010001101001011100110110001101101000

(a) Sei $x \in [0, 1)$. Wir definieren rekursiv eine Folge z_n durch

$$z_N = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 2^N \left(x - \sum_{n=1}^{N-1} z_n 2^{-n} \right) < 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um klar zu sein, schreiben wir explizit, dass

$$z_1 = \begin{cases} 0 & \text{wenn } 2\,(x - 0) < 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass $0 \leq 2^N (x - \sum_{n=1}^{N} z_n 2^{-n}) < 1$. *(3 Punkte)*

(b) Zeige, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n 2^{-n} = x$. *(1 Punkt)*

(c) Betrachte die Folgen

$$z_n = (1, 0, 0, 0, 0, \dots) \qquad\qquad w_n = (0, 1, 1, 1, 1, \dots).$$

Was sind $\sum_{n=1}^{\infty} z_n 2^{-n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} w_n 2^{-n}$? *(1 Punkt)*

(d) Seien z_n, w_n zwei unterschiedliche Folgen, deren Elemente in $\{0, 1\}$ liegen. Nehme an, dass $\sum_{n=1}^{\infty} z_n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n 2^{-n}$. Zeige, dass es ein N gibt, so dass $z_n = 0$ und $w_n = 1$ (oder umgekehrt) für alle $n > N$. *(3 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/bjf43m43ly

9.4. Quantorendschungel Part II.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Nach Definition 5.20 heißt f *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < \delta \, \Rightarrow \, |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

Welche der folgenden Aussagen sind *äquivalent* zur gleichmäßigen Stetigkeit von f? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a) $\exists \delta > 0 \, \forall \epsilon > 0 \, \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < \delta \, \Rightarrow \, |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(2 Punkte)*

(b) $\forall x_0 \in X \, \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x_1, x_2 \in B(x_0, \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ *(2 Punkte)*
(mit $B(x_0, \delta)$ ist hierbei der Ball in X um x_0 mit Radius δ gemeint, vgl. Definition 5.1)

(c) $\forall \epsilon > 0 \, \exists c > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < c\delta \, \Rightarrow \, |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(1 Punkt)*

(d) $\forall \epsilon > 0 \, \exists c > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < \delta \, \Rightarrow \, |f(x_1) - f(x_2)| < c\epsilon)$ *(1 Punkt)*