Analysis I
8. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie Zwischenklausur: 25. Oktober 2025

Dieses Übungsblatt ist nur für die Vorbereitung des Zwischenklausuren. Es muss nicht abgegeben werden. Wir werden die Lösungen in der Großen Übung am Freitag 24. Oktober durcharbeiten.

8.1. Induktion.

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq n.$$

8.2. Beschränktheit und Supremum.

Sei

$$a_n = \frac{n^2}{1+n^2}.$$

(a) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist.

(b) Bestimme das Supremum und Infimum der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und untersuche, ob diese Menge ein Maximum und/oder ein Minimum besitzt.

8.3. Komplexen Zahlen.

(a) Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die komplexe Zahl $z := \frac{6+4\imath}{2-3\imath}$ von der Form $z = a + b\imath$ ist und berechnen Sie $|z|$.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung $|z-1| < |z-1+2\imath|$ erfüllen, und skizziere die Lösungsmenge in der Zahlenebene. Markieren Sie die Randpunkte, die zu der Menge gehören, mit durchgezogenen Linien, und die Randpunkte, die nicht zu der Menge gehören, mit gestrichelten Linien.

8.4. Konvergenz von Folgen.

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen. Sie dürften den Rechenregeln

$$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim a_n} \qquad \text{wenn } a_n \geq 0 \text{ und konvergiert}$$

benutzen, den wir in der Großen Übung beweisen haben.

(a) $a_n := \dfrac{1}{n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$.

(b) $b_n := \frac{\sqrt{3n^2+1}}{2n+1}$.

(c) $c_n := (1 - \frac{1}{n})^n$.

8.5. Potenzreihen.

Wir wissen, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{mit Konvergenzradius } R = 1.$$

(a) Zeigen Sie, mit Hilfe von Cauchy Produkt,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \qquad \text{für } |x| < 1.$$

(b) Aufgrund der Gleichung in (a) sehen Sie, dass der Konvergenzradius der Reihe aus (a) ≥ 1 ist. Zeigen Sie, dass er nicht größer als 1 ist.

(c) Berechnen Sie den Grenzwert von der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Hinweis. Sie können die Teilaufgaben unabhängig voreinander lösen, wenn Sie in den Teilaufgaben (b) und (c) die Teile (a) bzw. (a) und (b) benutzen.

8.6. Beweis von etwas neu.

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge, die gegen 1 konvergiert. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge, die rekursiv definiert ist:

$$a_1 := 1, \qquad a_{n+1} = a_n b_n.$$

Zeige, dass a_n konvergiert.