Analysis I
7. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie 20. Oktober 2025

7.1. Bruchlandung.

Beweise, dass die folgende Reihe in $\mathbb{R}$ konvergent ist und berechne ihren Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \,.$$ *(3 Punkte)*

[Tipp: Man schreibe $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{\alpha}{2k+1} + \frac{\beta}{2k+3}$ mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.]

7.2. Reihenfall oder Erfolg.

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$. (Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden.)

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k-1}}$ *(2 Punkte)*

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^5}$ *(2 Punkte)*

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}$ *(2 Punkte)*

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+14k+30}{2k^4+2k^3+k+12}$ *(2 Punkte)*

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *(2 Punkte)*

Desmos Demo: https://www.desmos.com/calculator/wquxaelfae

7.3. Zone of Danger?

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ *(1 Punkt)*

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ *(2 Punkte)*

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} x^n$ *(1 Punkt)*

7.4. Größer als Zeta.

Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$. *(3 Punkte)*