

Analysis I

5. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie

6. Oktober 2025

5.1. Das Eckige im Runden.

(a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2$ (1 Punkt)

(ii) $\frac{4+i}{3-i}$ (1 Punkt)

(iii) $\sqrt{3-4i}$ (2 Punkte)

(b) Rechne $\left|\frac{4+i}{3-i}\right|$. (1 Punkt)

5.2. Kunstkurs.

Beschreibe die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene, indem Sie die Mengen vorher geeignet umformen:

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 1\}$ (2 Punkte)

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z+2i| < |z-2|\}$ (2 Punkte)

5.3. Es hat alles ein Ende, nur die Wurst hat zwei.

Bestimme die Grenzwerte der folgenden Folgen durch die Verwendung der Rechenregeln (Satz 3.5).

(a) $a_n := \frac{1+2n^2}{5+n+n^2}$ (1 Punkt)

(b) $b_n := \frac{2^n+3^n}{5^n}$ (1 Punkt)

(c) $c_n := \frac{(-1)^n}{n}$ (1 Punkt)

(d) $d_n := \frac{n}{4^n}$ (2 Punkte)
[Hint. Bernoulli Ungleichung für 2^n .]

(e) $e_n = \sqrt{n^2+1} - n$ (2 Punkte)
[Ohne Beweis darf verwendet werden: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$.]

Passt deine Antwort zu Desmos?

Desmos Demo: <https://www.desmos.com/calculator/50gazdc2rk>

5.4. Unwahre Umkehrungen.

Finde jeweils ein Beispiel für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften.

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt, aber es gilt nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. (1 Punkt)
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$,
wobei $c \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Zahl ist. (1 Punkt)
- (c) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. (1 Punkt)
- (d) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und divergieren (haben also keinen Grenzwert), aber die
Summe $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. (1 Punkt)