Analysis I
4. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie 29. September 2025

4.1. Unendlich beschränkt.

In dieser Aufgaben betrachten wir nur nach oben Beschränktheit, Maximum und Supremum. Man kann natürlich ähnliche Aufgabe für nach unten Beschränktheit, Minimum und Infimum.

Zeige, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ von oben beschränkt sind und bestimme (mit Begründung!) ihr Supremum.

(a) $A := \left\{ \dfrac{1+2n}{1+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. *(3 Punkte)*

(b) $B := (0,1) \setminus \left\{ 1 - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. *(3 Punkte)*

(c) Betrachte nun, die Teilmenge $C = (0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ von $\mathbb{Q}$. Es ist nach oben beschränkt (z.B. 2 ist eine obere Schranke). Hat es in $\mathbb{Q}$ ein Supremum? Begründe deine Antwort. *(4 Punkte)*
[Tipp. Für eine obere Schranke s, zeige, dass $t = \frac{s^2+2}{2s}$ auch eine ist.]

4.2. Potenzielles Wachstum.

Sei $\mathbf{K}$ ein angeordneter, archimedischer Körper. Zeige, dass für $b \in \mathbf{K}$ folgendes gilt:

(a) Ist $b > 1$, so gibt es zu jeder Zahl $K \in \mathbf{K}$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n > K.$$ *(3 Punkte)*

[Tipp. Die Bernoulli Ungleichung (Satz 2.32) und die archimedische Eigenschaft (Satz 2.45 (i))]

(b) Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n < \varepsilon.$$ *(2 Punkte)*

4.3. Eine ganzheitliche Vereinigung.

Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen mit $X \cup Y = \mathbb{R}$, so dass $x < y$ für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ gilt. Zeigen Sie, dass X nach oben und Y nach unten beschränkt ist und dass

$$\sup(X) = \inf(Y)$$

gilt. *(5 Punkte)*

4.4. Doch recht viel Platz.

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (0,1) \to (0,\infty),\ t \mapsto t^{-1} - 1.$$

Was hat das mit Mächtigkeit zu tun? *(2 Zusatzpunkte)*