Analysis I
3. Übung

Martin Schmidt, Ross Ogilvie — 22. September 2025

3.1. Ungleichung.

Begründe mit Axiomen und Sätzen aus dem Skript die folgenden Aussagen:

(a) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. *(2 Punkte)*

(b) Für $x, y > 0$ gilt $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$. *(3 Punkte)*

(c) Die *Parallelogrammungleichung*: $|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$.
[Tipp: Man zeige zuerst $|a+b| + |a-b| \geq 2|a|$.] *(3 Punkte)*

3.2. Grundschulmathematik.

Man zeige:

(a) die berühmte Gaußsche Summenformel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *(2 Punkte)*

(b) $n^2 + 3 \leq 3^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 1$. *(3 Punkte)*
[Tipp. Vergleiche $2n$ und 4 mit n^2.]

(c) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $8^n - 3^n$ durch 5 teilbar. *(3 Punkte)*
[Tipp. Eine Zahl durch 5 teilbar ist, genauso wenn es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass es als $5m$ geschrieben kann.]

3.3. Endlich beschränkt.

Sind die folgende Menge nach oben beschränkt. Was ist das Maximum, falls es existiert?

(a) Die Menge der Primzahlen. *(1 Punkt)*

(b) $[0, 1]$. *(1 Punkt)*

(c) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 5\}$. *(1 Punkt)*

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5\}$. *(1 Punkt)*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion: Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von einem angeordneten Körper $\mathbf{K}$ besitzt ein Maximum. *(3 Zusatzpunkte)*