Hyperbolische lineare Isomorphismen

Philipp Weiner

09.10.2024

Ein zeitdiskretes dynamisches System besteht aus einer Menge X, die als Zustandsraum bezeichnet wird, und einer Abbildung $f : X \to X$, die den Übergang von einem Zustand zum nächsten beschreibt. Das System entwickelt sich durch die wiederholte Anwendung der Abbildung f, d.h.:

$$f^{(n)}(x_0) \coloneqq f(f^{(n-1)}(x_0))$$

beschreibt den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{Z}$, ausgehend von einem Startwert $x_0 \in X$.
Wir betrachten im Folgenden **lineare zeitdiskrete dynamische Systeme**, d.h. wir nehmen an, dass f eine lineare Abbildung $A : E \to E$ auf einem endlich-dimensionalen normierten Vektorraum E ist.

Definition: *Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E heißen* ***äquivalent****, wenn es eine Konstante $K \geq 1$ gibt, sodass:*

$$K^{-1}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq K\|v\|_1, \forall v \in E$$

Wir nennen K relative Konstante zwischen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$.

In einem endlich-dimensionalen normierten Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Definition: *Ein linearer Isomorphismus $A : E \longrightarrow E$ heißt* ***hyperbolisch*** *wenn sich E in eine direkte Summe $E = E^s \oplus E^u$ teilt, wobei E^s und E^u invariant unter A sind, d.h. $A(E^s) = E^s$ und $A(E^u) = E^u$, und zwei Konstanten $C \geq 1$ und $0 < \lambda < 1$ existieren, sodass die folgenden Abschätzungen gelten:*

$$|A^n v| \leq C\lambda^n |v|, \forall v \in E^s, n \geq 0$$

$$|A^{-n} v| \leq C\lambda^n |v|, \forall v \in E^u, n \geq 0$$

Weil $C\lambda^n|v|$ wegen $\lambda \in (0,1)$ monoton fallend in n ist, folgt aus der Definition direkt $\lim_{n\to\infty}|A^n v| = 0, \forall v \in E^s$ und $\lim_{n\to\infty}|A^{-n}v| = 0, \forall v \in E^u$, sowie $\lim_{n\to\infty}|A^{-n}v| = \infty, \forall v \in E^s$ und $\lim_{n\to\infty}|A^n v| = \infty, \forall v \in E^u$. Deswegen nennen wir E^s den kontrahierenden bzw. den stabilen Unterraum von A und E^u den expandierenden bzw. den instabilen Unterraum von A.

Sei $A : E \longrightarrow E$ hyperbolisch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$, d.h. $\exists C \geq 1$, $0 < \lambda < 1$:

$$\|A^n v\|_1 \leq C\lambda^n \|v\|_1, \forall v \in E^s, n \geq 0$$
$$\|A^{-n} v\|_1 \leq C\lambda^n \|v\|_1, \forall v \in E^u, n \geq 0$$

Sei nun $\|\cdot\|_2$ eine zu $\|\cdot\|_1$ äquivalente Norm, d.h. $\exists K \geq 1$:

$$K^{-1}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq K\|v\|_1, \forall v \in E$$
$$\Leftrightarrow \|v\|_1 \leq K\|v\|_2, \forall v \in E \text{ und } \|v\|_2 \leq K\|v\|_1, \forall v \in E$$

Aus der Definition von Hyperbolizität und der Definition von der Äquivalenz von Normen folgt nun:

$$\|A^n v\|_2 \leq K\|A^n v\|_1 \leq KC\lambda^n\|v\|_1 \leq KC\lambda^n K\|v\|_2 = (K^2C)\lambda^n\|v\|_2, K^2C > 1$$
$$\|A^{-n} v\|_2 \leq K\|A^{-n} v\|_1 \leq KC\lambda^n\|v\|_1 \leq KC\lambda^n K\|v\|_2 = (K^2C)\lambda^n\|v\|_2, K^2C > 1$$

Somit ist A auch hyperbolisch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$.
Weil in einem endlich-dimensionalen Vektorraum alle Normen äquivalent sind, ist demnach die Hyperbolizität unabhängig von der Wahl der Norm auf E.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass der stabile oder der instabile Raum nur den Nullvektor enthält. Im Fall $E^s = \{0\}$ nennen wir A eine **Quelle**, da A auf alle Vektoren expandierend wirkt. Im Fall $E^u = \{0\}$ nennen wir A eine **Senke**, da A auf alle Vektoren kontrahierend wirkt.

Beispiel: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto Av := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} v$
Sei $X = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ *die x-Achse und* $\left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$ *die y-Achse.*

$$X \oplus Y = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

Somit ist $\mathbb{R}^2$ die direkte Summe von X und Y.

$$|A^n \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n x \\ 0 \end{pmatrix}|$$
$$= |\left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty$$
$$|A^{-n} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}| = |(A^{-1})^n \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}|$$
$$= |\begin{pmatrix} 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n y \end{pmatrix}| = |\left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}| \to 0 \quad \textit{für} \quad n \to \infty$$

Also ist A ein hyperbolischer linearer Isomorphismus, wobei X der stabile und Y der instabile Unterraum ist.

Bisher sind E^s und E^u nur abstrakte Unterräume, deren genauere Struktur unbekannt ist. Deshalb führen wir folgende Definition ein:

Definition: *Für $\gamma > 0$ sind die* ***γ -Kegel*** *um E^s und E^u gegeben durch*

$$\begin{aligned} C_\gamma(E^s) &= \{v \in E \mid |v_u| \leq \gamma |v_s|\} \\ C_\gamma(E^u) &= \{v \in E \mid |v_s| \leq \gamma |v_u|\} \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser γ -Kegel lassen sich nun der stabile und instabile Raum eines hyperbolisch linearen Isomorphismus eindeutig charakterisieren. Die Idee dahinter ist, dass aus $A^n v \in C_\gamma(E^s)$, $\forall n \geq 0$ folgt, dass $|A^n v_u| \leq \gamma |A^n v_s|, \forall n \geq 0$ gilt. Weil aber v_s in E^s liegt, gilt $\lim_{n\to\infty} A^n v_s = 0$, was wiederrum $\lim_{n\to\infty} A^n v_u = 0$ impliziert. Da allerdings eigentlich aus $v_u \in E$, $\lim_{n\to\infty} |A^n v_u| = \infty$ folgt, muss $v_u = 0$ gelten, woraus $v = v_s + v_u = v_s \in E^s$ folgen würde.

Theorem: *Sei $A : E \longrightarrow E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphismus mit der Zerlegung $E = E^s \oplus E^u$. Dann werden E^s und E^u charakterisiert durch:*

$$\begin{aligned} E^s &= \left\{v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^n v = 0\right\} \\ &= \{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^n v| \leq r, \forall n \geq 0\} \\ &= \{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \forall n \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E^u &= \left\{v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^{-n} v = 0\right\} \\ &= \left\{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^{-n} v| \leq r, \forall n \geq 0\right\} \\ &= \left\{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^{-n} v \in C_\gamma(E^u), \forall n \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Beweis: *Sei* $v \in E^s$. *Da* E^s *der stabile Unterraum ist, folgt direkt* $\lim_{n\to\infty} A^n v = 0$. *Also gilt* $v \in \{v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^n v = 0\}$ *und somit* $E^s \subseteq \{v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^n v = 0\}$.

Sei als nächstes $v \in \{v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^{-n} v = 0\}$. *Nach Definition gilt* $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq N : |A^n v - 0| = |A^n v| < \epsilon$. *Das bedeutet, dass für große* $n \geq N$, $|A^n v|$ *durch* ϵ *beschränkt ist. Also existiert eine Schranke* $r_1 := \epsilon$, *sodass* $|A^n v| < r_1, \forall n \geq N$. *Für* $n < N$ *ist* $A^n v$ *eine endlich-fache Ausführung einer linearen Abbildung in einem endlich-dimensionalen Vektorraum und somit ist* $A^n v$ *selber wieder ein wohldefinierter Vektor in einem endlich-dimensionalen Vektorraum. Daraus folgt wiederrum, dass* $|A^n v| < \infty, \forall n < N$ *gilt und deswegen existiert das Maximum* $\max_{n<N} |A^n v| < \infty$. *Setzen wir nun* $r_2 := \max_{n<N} |A^n v|$, *folgt* $|A^n v| \leq r_2, \forall n < N$. *Wählt man jetzt* $r := max\{r_1, r_2\}$, *gilt* $|A^n v| \leq r, \forall n \geq 0$. *Somit gilt* $v \in \{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^{-n} v| \leq r, \forall n \geq 0\}$, *also* $\{v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^n v = 0\} \subseteq \{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^n v| \leq r, \forall n \geq 0\}$.

Sei $v \notin \{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \forall n \geq 0\}$. *Das bedeutet, dass für jedes* $\gamma > 0$ *ein* $m \geq 0$ *existieren muss, sodass* $A^m v \notin C_\gamma(E^s) = \{v \in E \mid |v_u| \leq \gamma |v_s|\}$. *Insbesondere existiert also ein* $m \geq 0$, *sodass* $A^m v \notin C_1(E^s) = \{v \in E \mid |v_u| \leq |v_s|\}$, *d.h.* $|A^m v_s| < |A^m v_u|$. *Somit kann nicht* $|A^m v_u| = 0$ *gelten, weil sonst* $|A^m v_u| = 0 \leq |A^m v_s|$ *ein Widerspruch zu* $|A^m v_s| < |A^m v_u|$ *wäre. Außerdem folgt aus der Invarianz von* E^s *und* E^u *unter* A, *dass* $A^m v_s \in E^s$ *und* $A^m v_u \in E^u$ *gilt. Also gilt* $\lim_{n\to\infty} |A^n(A^m v_s)| = 0$ *und* $\lim_{n\to\infty} |A^n(A^m v_u)| = \infty$.

$$\begin{aligned}
|A^n(A^m v)| = |A^n(A^m(v_s + v_u))| &\overset{Lin.}{=} |A^n(A^m v_s) + A^n(A^m v_u)| \\
&\leq \Big| |A^n(A^m v_s)| - |A^n(A^m v_u)| \Big| \xrightarrow[n\to\infty]{} |0 - \infty| = \infty
\end{aligned}$$

Somit ist $\{|A^n v|\}_{n=0}^{\infty}$ *unbeschränkt, was wiederrum bedeutet, dass* $\forall r > 0$, $\exists n \geq 0 : |A^n v| > r$. *Also gilt* $v \notin \{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^n v| \leq r, \forall n \geq 0\}$ *und nach Kontraposition folgt* $\{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^n v| \leq r, \forall n \geq 0\} \subseteq \{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \forall n \geq 0\}$.

Sei $v \notin E^s$. *Wir wissen, dass eine Zerlegung* $v = v_s + v_u$, *mit* $v_s \in E^s$ *und* $v_u \in E^u$, *existiert. Es muss also* $v_u \neq 0$ *gelten, weil sonst* $v = v_s + v_u = v_s + 0 = v_s \in E^s$ *ein Widerspruch zu* $v \notin E^s$ *wäre. Somit gilt* $\lim_{n\to\infty} A^n v_s = 0$ *wegen* $v_s \in E^s$ *und* $\lim_{n\to\infty} |A^n v_s| = \infty$ *wegen* $0 \neq v_u \in E^u$. *Demnach existiert für jedes* $\gamma > 0$ *ein* $n \geq 0$, *sodass* $|A^n v_u| > \gamma |A^n v_s|$ *gilt, d.h.* $A^n v \notin C_\gamma(E^s)$. *Also* $v \notin \{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \forall n \geq 0\}$ *und nach Kontraposition folgt* $\{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \forall n \geq 0\} \subseteq E^s$.

Nimmt man alle Teilmengenimplikationen zusammen erhält man

$$\begin{aligned} E^s &\subseteq \left\{ v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^n v = 0 \right\} \\ &\subseteq \{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^n v| \leq r, \, \forall n \geq 0\} \\ &\subseteq \{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \, \forall n \geq 0\} \subseteq E^s. \end{aligned}$$

Daraus folgt wiederrum

$$\begin{aligned} E^s &= \left\{ v \in E \mid \lim_{n\to\infty} A^n v = 0 \right\} \\ &= \{v \in E \mid \exists r > 0 : |A^n v| \leq r, \, \forall n \geq 0\} \\ &= \{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \, \forall n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Der Beweis für E^u verläuft analog. ***q.e.d.***

Aus der Charakterisierung des stabilen und instabilen Unterraums folgt direkt die Eindeutigkeit der hyperbolischen Zerlegung. Angenommen $E = G^s \oplus G^u$ sei eine weitere hyperbolische Zerlegung von A. Nach vorherigem Theorem gilt dann

$$G^s = \{v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^n v \in C_\gamma(E^s), \, \forall n \geq 0\} = E^s$$

$$G^u = \left\{ v \in E \mid \exists \gamma > 0 : A^{-n} v \in C_\gamma(E^u), \, \forall n \geq 0 \right\} = E^u.$$

Weil $C\lambda^n$ aus der Definition der Hyperbolizität für kleine n nicht kleiner als 1 sein muss, folgt aus $|A^n v| \leq C\lambda^n |v|, \forall v \in E^s$ und $|A^{-n} v| \leq C\lambda^n |v|, \forall v \in E^u$ nicht unbedingt $|A^n v| \leq |v|, \forall v \in E^s$ und $|A^{-n} v| \leq |v|, \forall v \in E^u$. Also kann es durchaus dauern, bis die Kontraktions- bzw. Expansionseigenschaften von A unter der Norm $|\cdot|$ sichtbar werden. Folgendes Theorem besagt allerding, dass es eine Norm $\|\cdot\|$ auf E gibt, sodass die hyperbolischen Eigenschaften von A klar erkennbar werden. Durch die Wahl einer geeigneten Norm kann also das Kontraktions- bzw. das Expansionsverhalten unmittelbar sichtbar gemacht werden.

Theorem: *Sei A ein hyperbolischer linearer Isomorphismus mit der zerlegung $E = E^s \oplus E^u$. Dann existiert eine Norm $\|\cdot\|$ auf E und eine Konstante $0 < \tau < 1$, sodass:*

$$\|Av\| \leq \tau \|v\|, \forall v \in E^s$$

$$\|A^{-1} v\| \leq \tau \|v\|, \forall v \in E^u$$

Beweis: *Sei $|\cdot|$ weiterhin die ursprüngliche Norm aus der Definition für Hyperbolizität. Nach Definition existieren zwei Konstanten $C \geq 1$ und $0 < \lambda < 1$, sodass:*

$$|A^n v| \leq C\lambda^n |v|, \forall v \in E^s, n \geq 0$$
$$|A^{-n} v| \leq C\lambda^n |v|, \forall v \in E^u, n \geq 0$$

Da $C\lambda^n \longrightarrow 0, n \to \infty$ gilt, $\exists N \geq 1 : C\lambda^N < 1$. Mit Hilfe von diesem N definieren wir nun die Norm $\|v\| := \sum_{n=0}^{N-1} |A^n v|$ und $a := \sum_{n=0}^{N-1} C\lambda^n$.
Sei $v \in E^s$.

$$\|v\| \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} |A^n v| \overset{|A^n v| \leq C\lambda^n |v|,\ \forall v \in E^s}{\leq} \sum_{n=0}^{N-1} C\lambda^n |v| \overset{\text{Lin.}}{=} |v| \sum_{n=0}^{N-1} C\lambda^n \overset{\text{Def.}}{=} a|v|$$
$$\Leftrightarrow |v| \geq a^{-1}\|v\|$$

$$\begin{aligned}
\|Av\| &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} |A^n(Av)| = \sum_{n=0}^{N-1} |A^{n+1}v| \overset{\text{Index Shift}}{=} \sum_{n=1}^{N} |A^n v| = \sum_{n=1}^{N-1} |A^n v| + |A^N v| \\
&\overset{\pm 0}{=} \sum_{n=1}^{N-1} |A^n v| + |A^0 v| - |A^0 v| + |A^N v| = \sum_{n=0}^{N-1} |A^n v| - |A^0 v| + |A^N v| \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |A^n v| - |v| + |A^N v| \overset{\text{Def.}}{=} \|v\| - |v| + |A^N v| \overset{v \in E^s}{\leq} \|v\| - |v| + C\lambda^N |v| \\
&= \|v\| - (1 - C\lambda^N)|v| \overset{|v| \geq a^{-1}\|v\|}{\leq} \|v\| - (1 - C\lambda^N)a^{-1}\|v\| \\
&= (1 - a^{-1}(1 - C\lambda^N))\|v\|
\end{aligned}$$

Sei jetzt $v \in E^u$.

$$\begin{aligned}
\|v\| &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} |A^n v| = \sum_{n=0}^{N-1} |A^{-n}(A^{N-1}v)| \overset{|A^{-n} v| \leq C\lambda^n |v|,\ \forall v \in E^u}{\leq} \sum_{n=0}^{N-1} C\lambda^n |A^{N-1}v| \\
&\overset{\text{Lin.}}{=} |A^{N-1}v| \sum_{n=0}^{N-1} C\lambda^n \overset{\text{Def.}}{=} a|A^{N-1}v| \ \Leftrightarrow\ |A^{N-1}v| \geq a^{-1}\|v\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|A^{-1}v\| &\overset{Def.}{=} \sum_{n=0}^{N-1} |A^n(A^{-1}v)| = \sum_{n=0}^{N-1} |A^{n-1}v| = \sum_{n=1}^{N-1} |A^{n-1}v| + |A^{0-1}v| \\
&= \sum_{n=1}^{N-1} |A^{n-1}v| + |A^{-1}v| \overset{Index\ Shift}{=} \sum_{n=0}^{N-2} |A^n v| + |A^{-1}v| \\
&\overset{\pm 0}{=} \sum_{n=0}^{N-2} |A^n v| + |A^{N-1}v| - |A^{N-1}v| + |A^{-1}v| \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |A^n v| - |A^{N-1}v| + |A^{-1}v| \overset{Def.}{=} \|v\| - |A^{N-1}v| + |A^{-1}v| \\
&= \|v\| - |A^{N-1}v| + |A^{-N}(A^{N-1}v)| \overset{A^{N-1}v \in E^u}{\leq} \|v\| - |A^{N-1}v| + C\lambda^N |A^{N-1}v| \\
&= \|v\| - (1 - C\lambda^N)|A^{N-1}v| \overset{|A^{N-1}v| \geq a^{-1}\|v\|}{\leq} \|v\| - (1 - C\lambda^N)a^{-1}\|v\| \\
&= (1 - a^{-1}(1 - C\lambda^N))\|v\|
\end{aligned}
$$

Wählen wir nun $\tau := 1 - a^{-1}(1 - C\lambda^N)$*, gilt* $\|Av\| \leq \tau\|v\|, \forall v \in E^s$ *und* $\|A^{-1}v\| \leq \tau\|v\|, \forall v \in E^u$.
Weil $a = \sum_{n=0}^{N-1} C\lambda^n$ *eine Summe aus positiven Summanden ist und unter anderem* $C\lambda^0 = 1$ *einer dieser Summanden ist, gilt* $a > 1$*. Daraus folgt unmittelbar* $0 < a^{-1} < 1$*.* N *war so gewählt, dass* $0 < C\lambda^N < 1$ *gilt was wiederrum direkt* $0 < 1 - C\lambda^N < 1$ *impliziert. Zusammen folgt*
$0 < a^{-1}(1 - C\lambda^N) < 1$ *und somit auch* $0 < 1 - a^{-1}(1 - C\lambda^N) < 1$.
Also existier eine Norm $\|\cdot\|$ *und eine Konstante* $0 < \tau < 1$*, sodass*
$\|Av\| \leq \tau\|v\|, \forall v \in E^s$ *und* $\|A^{-1}v\| \leq \tau\|v\|, \forall v \in E^u$. ***q.e.d.***