# Satz von Hartman-Grobman

**Datum:** 12.12.2024
**Autor:** Stefan Pedljo

Der Satz von Hartman-Grobman besagt, dass sich ein Diffeomorphismus f nah an einem hyperbolischen Fixpunkt $p \in E$ ähnlich zu dessen Linearisierung $x \mapsto D(p)x$ nah an der 0 verhält.

## Definitionen und Sätze

Sei $E$ ein endlich dimensionaler Vektorraum. Wir nennen einen linearen Isomorphismus $A : E \mapsto E$ hyperbolisch, wenn $E$ in eine direkte Summe $E = E^s \oplus E^s$ invarianter Mengen $E^s$ und $E^u$ zerfällt, sodass es ein $C \geq 1$ und ein $0 < \lambda < 1$ gibt mit

$$|A^n v| \leq C\lambda^n |v| \text{ für alle } v \in E^s \text{ und } n \geq 0 \text{ und}$$

$$|A^{-n} v| \leq C\lambda^n |v| \text{ für } v \in E^u \text{ und } n \geq 0$$

für eine Norm $|\cdot|$ von $E$. Invariant bedeutet, dass $A(E^s) = E^s$ für den sogenannten stabilen Unterraum und $A(E^u) = E^u$ für den sogenannten instabilen Unterraum gelten. Es ist $E^s \cap E^u = \{0\}$: Wählen wir ein $v \in E^s \cap E^u$, so ist auch $A^n v \in E^u$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, da $E^u$ invariant ist. Somit gilt auch $|v| \leq C\lambda^n |A^n v|$ für $v \in E^u$ und $n \geq 0$. Weil aber $v \in E^s$, gilt

$$|v| \leq C\lambda^n |A^n v| \leq C\lambda^n (C\lambda^n |v|) = C^2 \lambda^{2n} |v| \text{ , für beliebige } n \geq 0$$

und für ein $n$, das groß genug ist, ist $C^2\lambda^{2n} < 1$. Die obere Ungleichung ist also genau dann erfüllt, wenn $v = 0$ gilt. Damit folgt $E^s \cap E^u = \{0\}$.

Wir betrachten die lineare Abbildung $\Psi : E^s \times E^u \mapsto E, (a, b) \mapsto a + b$. Sie ist injektiv, da für $(a, b), (a', b') \in E^s \times E^u$ mit

$$a + b = \Psi(a, b) = \Psi(a', b') = a' + b'$$

$$\iff E^s \ni a - a' = b - b' \in E^u$$

gilt, weil $E^s$ und $E^u$ Unterräume sind. Also ist $a - a' = 0 = b - b'$ und damit ist $\Psi$ injektiv. Wegen $E = E^s \oplus E^s$ und $E^s \cap E^u = \{0\}$ ist $dim(E) = dim(E^s) + dim(E^u)$ und damit ist $\Psi$ auch surjektiv. Somit existiert die Umkehrabbildung $\Psi^{-1} := (\Psi_1^{-1}, \Psi_2^{-1})$. Seien $P_s := \Psi_1^{-1}$ und $P_u := \Psi_2^{-1}$ die Projektionen auf $E^s$ bzw. $E^u$. Wir definieren $v_s = P_s v$, $v_u = P_u v$ für $v \in E$ und $\eta_s = P_s \circ \eta$,$\eta_u = P_u \circ \eta$ für eine stetige Selbstabbildung $\eta \in C(E)$. $\eta_s$ bzw. $\eta_u$ sind also Abbildungen $E \mapsto E^s$ bzw. $E \mapsto E^u$.

Eine Norm $|\cdot|$ von $E$ heißt adaptiert an $A$, falls es ein $0 < \tau < 1$ gibt, sodass

$$|Av| \leq \tau |v| \text{ für alle } v \in E^s \text{und}$$

$$|A^{-1} v| \leq \tau |v| \text{ für alle } v \in E^u$$

gelten. $\tau$ heißt die Verzerrung von $A$. $|\cdot|$ heißt zusätzlich vom Boxtyp, falls für $v \in E$

$$|v| = max\{|v_s|, |v_u|\}$$

gilt. Unter anderem wegen Satz 2.3 existiert zu jedem hyperbolischen linearen Isomorphismus $A$ stets eine an $A$ adaptierte Boxnorm.

Sei $E'$ ebenfalls ein endlich dimensionaler Vektorraum mit der Norm $|\cdot|'$ und sei $A : E \mapsto E'$ eine linearen Funktion. Die Minimalnorm von $A$ ist definiert als

$$m(A) := \inf_{|v|=1} \{|Av|'\}$$

und falls $A$ zusätzlich invertierbar ist, gilt $m(A) = |A^{-1}|^{-1}$. Sei nun $A : E \mapsto E'$ ein linearer Isomorphismus und sei $\phi : E \mapsto E'$ Lipschitzstetig mit $Lip\phi < m(A)$,wobei $Lip\phi := \inf\{L|L \text{ ist Lipschitzkonstante von } \phi\}$ bezeichne. Satz 2.7 besagt, dass auch $A + \phi : E \mapsto E'$ ein Lipschitzstetiger Homöomorphismus ist mit Lipschitzstetiger Umkehrabbildung.

Einen Fixpunkt eines Diffeomorphismus f nennen wir hyperbolisch, wenn die lineare Abbildung $Df(p) : E \mapsto E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphismus ist. Es sei

$$C_b(E) := \left\{\phi \in C(E) \mid \sup_{x\in E} |\phi(x)| < \infty\right\}$$

mit der Supremumsnorm

$$\|\phi\|_\infty := \sup_{x\in E} |\phi(x)|$$

die Menge der stetigen, beschränkten Selbstabbildungen. Dies ist bekanntermaßen ein Banachraum.

## Lemma

Sei $A : E \mapsto E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphismus und sei $|\cdot|$ eine an $A$ adaptierte Boxnorm von E mit Verzerrung $0 < \tau < 1$. Seien $\phi, \psi \in C_b(\mathcal{E})$ Lipschitzstetige Funktionen mit

$$\max\{\text{Lip } \phi, \text{Lip } \psi\} < \min\{1 - \tau, m(A)\}.$$

Dann existiert genau ein $\eta \in C_b(E)$, sodass $id+\eta : E \mapsto E$ ein Homöomorphismus ist und folgende Gleichung erfüllt:

$$(\text{id} + \eta)(A + \phi) = (A + \psi)(\text{id} + \eta).$$

Die Multiplikation ist hier als Verkettung von Funktionen zu verstehen.

## Beweis:

Die Beweisidee ist es, das Problem der Lösung der Gleichung in ein geeignetes Fixpunktproblem einer Selbstabbildung $T$ von $C_b(E)$ zu überführen. Daraufhin wenden wir den Banachschen Fixpunktsatz an, welcher die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunkts garantiert. Diese stetige beschränkte Funktion $\eta \in C_b(E)$ wird gleichzeitig eine Lösung der Gleichung sein. Zum Schluss wird dann gezeigt, dass $id{+}\eta$ tatsächlich ein Homöomorphismus ist. Mit Äquivalenzumformungen erhalten wir:

$$(\mathrm{id}+\eta)(A+\phi) = (A+\psi)(\mathrm{id}+\eta) \ (*)$$

$$\iff \quad \mathrm{id}(A+\phi) + \eta(A+\phi) = A(\mathrm{id}+\eta) + \psi(\mathrm{id}+\eta)$$

$$\iff \quad A+\phi+\eta(A+\phi) = A + A\eta + \psi(\mathrm{id}+\eta)$$

$$\iff \quad \eta(A+\phi) = A\eta + \psi(\mathrm{id}+\eta) - \phi$$

Wenn wir die Gleichung zerlegen in den stabilen Teil $E^s$ und den instabilen Teil $E^u$ erhalten wir wegen der Hyperbolizität von $A$:

$$\eta_s(A+\phi) = A\eta_s + \psi_s(\mathrm{id}+\eta) - \phi_s,$$

$$\eta_u(A+\phi) = A\eta_u + \psi_u(\mathrm{id}+\eta) - \phi_u.$$

$$\iff \quad \eta_s = (A\eta + \psi_s(\mathrm{id}+\eta) - \phi_s)\,(A+\phi)^{-1},$$
$$\eta_u = A^{-1}\left(\eta_u\,(A+\phi) - \psi_u\,(\mathrm{id}+\eta) + \phi_u\right)$$

Da $\mathrm{Lip}\phi < \min\{1-\eta, m(A)\} \leq m(A)$ gilt, ist nach Satz 2.7 $(A+\phi)$ tatsächlich invertierbar. Es sollte angemerkt werden, $E^s$ und $E^u$ im Allgemeinen keine invarianten Mengen von $\psi$ bzw. $\eta$ sind und sich deshalb $\mathrm{id}+\eta$ bzw. $A+\phi$ nicht etwa weiter zerlegen lassen, sodass nur noch $\psi_s(\mathrm{id}_s+\eta_s)$, $\eta_u\,(A_u+\phi_u)$ oder $\psi_u\,(\mathrm{id}_u+\eta_u)$ übrigblieben.

Wir definieren $T : C_b(E) \mapsto C_b(E)$,

$$\eta \mapsto T_s(\eta)+T_u(\eta) := (A\eta_s+\psi_s(\mathrm{id}+\eta)-\phi_s)+(A^{-1}(\eta_u\,(A+\phi)-\psi_u\,(\mathrm{id}+\eta)+\phi_u)$$

Da wir nur Äquivalenzumformungen verwendet haben, folgt, dass ein $\eta$ genau dann $(*)$ erfüllt, wenn es ein Fixpunkt von $T$ ist. Weil $\phi, \psi, \eta \in C_b(E)$ gilt, ist deren Wertebereich beschränkt. Das Bild einer beschränkten Menge bleibt nach Anwendung der linearen Abbildung $A$ beschränkt. Also ist $T$ tatsächlich eine Selbstabbildung. Nun beweisen wir die Kontraktionseigenschaft von $T$: Für $\eta, \eta' \in C_b(E)$ gilt mit der Boxeigenschaft von $|\cdot|$

$$\|T(\eta) - T(\eta')\|_\infty = \sup_{x\in E} |(T(\eta) - T(\eta'))(x)|$$
$$= \sup_{x\in E} \max\{|P_s(T(\eta) - T(\eta'))(x)|, |P_u(T(\eta) - T(\eta'))(x)|\}$$
$$= \max\{\sup_{x\in E} |(T_s(\eta) - T_s(\eta'))(x)|, \sup_{x\in E} |(T_u(\eta) - T_u(\eta'))(x)|\}$$

$$= \max\{\|(T_s(\eta) - T_s(\eta'))(x)\|_\infty, \|(T_u(\eta) - T_u(\eta'))(x)\|_\infty\}.$$

Wir können also den stabilen und den instabilen Teil getrennt voneinander abschätzen. Für den stabilen Teil gilt:

$$\begin{aligned}
\|T_s(\eta) - T_s(\eta')\|_\infty &= \|(A(\eta_s - \eta_s') + \psi_s\eta - \psi_s\eta)(A+\psi)^{-1}\|_\infty \\
&= \sup_{x\in E} |(A(\eta_s - \eta_s') + \psi_s\eta - \psi_s\eta')(A+\psi)^{-1}(x)| \\
&\leq \sup_{y\in E} |(A(\eta_s - \eta_s') + \psi_s\eta - \psi_s\eta')(y)| \\
&\leq \sup_{y\in E} (\tau|(\eta_s - \eta_s')(y)| + |(\psi_s\eta - \psi_s\eta')(y)|) \\
&\leq \sup_{y\in E} (\tau|(\eta - \eta')(y)| + \mathrm{Lip}\psi|(\eta - \eta')(y)|) \\
&= (\tau + \mathrm{Lip}\,\psi)\|\eta - \eta'\|_\infty
\end{aligned}$$

Die dritte Zeile gilt, weil $(A+\psi)^{-1}[E] \subset E$. Für die vierte Zeile verwenden wir die Dreiecksungleichung und die Tatsache, dass $|\cdot|$ adaptiert ist an $A$. Und, da $|\cdot|$ auch von Boxtyp und $\psi$ Lipschitzstetig ist, gilt die vorletzte Ungleichung. Für den instabilen Teil gilt:

$$\begin{aligned}
\|T_u(\eta) - T_u(\eta')\|_\infty &= \|A^{-1}((\eta_u - \eta_u')(A+\phi) - \psi_u(\mathrm{id}+\eta) + \psi_u(\mathrm{id}+\eta'))\|_\infty \\
&\sup_{x\in E} |A^{-1}((\eta_u - \eta_u')(A+\phi) - \psi_u(\mathrm{id}+\eta) + \psi_u(\mathrm{id}+\eta'))(x)| \\
&\leq \tau \sup_{x\in E} |((\eta_u - \eta_u')(A+\phi) - \psi_u(\mathrm{id}+\eta) + \psi_u(\mathrm{id}+\eta'))(x)| \\
&\leq \tau \sup_{x\in E} (|(\eta_u - \eta_u')(A+\phi)(x)| + \mathrm{Lip}\psi|(\eta - \eta')(x)|) \\
&= \tau(\sup_{y\in E} |(\eta_u - \eta_u')(y)| + \mathrm{Lip}\psi\|\eta - \eta'\|_\infty) \\
&\leq \tau(\sup_{y\in E} |(\eta - \eta')(y)| + \mathrm{Lip}\psi\|\eta - \eta'\|_\infty) \\
&= \tau(\|(\eta - \eta')\|_\infty + \mathrm{Lip}\psi\|\eta - \eta'\|_\infty) \\
&\leq (\tau + \mathrm{Lip}\,\psi)\|\eta - \eta'\|_\infty
\end{aligned}$$

Die dritte Zeile gilt, da $|\cdot|$ adaptiert ist an $A$. Die vierte wegen der Dreiecksungleichung und der Lipschitzstetigkeit von $\psi$. Wieder folgt aus $(A+\phi)[E] \subset E$ die fünfte Ungleichung Und die drittletzte gilt, weil $|\cdot|$ von Boxtyp ist. Also ist

$$\|T(\eta) - T(\eta')\|_\infty \leq (\tau + \mathrm{Lip}\psi)\|\eta - \eta'\|_\infty$$

und somit ist $T$ wegen $\tau + \mathrm{Lip}\psi < \tau - (1+\tau) = 1$ eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert ein eindeutiger Fixpunkt von $T$ . Es gibt also ein eindeutiges $\eta \in C_b(E)$, sodass gilt:

$$(\mathrm{id}+\eta)(A+\phi) = (A+\psi)(\mathrm{id}+\eta)$$

Nun zeigen wir, dass $id + \eta$ ein Homöomorphismus ist:

Man vertausche $\phi$ und $\psi$. Die Voraussetzungen sind symmetrisch; man kommt auf analoge Abschätzungen und wegen Lip$\psi < \min\{1-\tau, m(A)\}$ ist $(A+\psi)$ nach Satz 2.7 ebenfalls invertierbar. W ir erhalten also damit auch ein eindeutiges $\xi \in C_b(E)$, sodass gilt:

$$(\mathrm{id} + \xi)(A+\psi) = (A+\phi)(\mathrm{id} + \xi)$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$(\mathrm{id} + \xi)(\mathrm{id} + \eta)(A+\phi) = (\mathrm{id} + \xi)(A+\psi)(\mathrm{id} + \eta)$$

$$= (A+\phi)(\mathrm{id} + \xi)(\mathrm{id} + \eta)$$

und analog

$$(\mathrm{id} + \eta)(\mathrm{id} + \xi)(A+\psi) = (A+\psi)(\mathrm{id} + \eta)(\mathrm{id} + \xi)$$

Es ist offensichtlich, dass

$$(\mathrm{id} + \eta)(\mathrm{id} + \xi) \in \mathrm{id} + C_b(E)$$

Mit der Eindeutigkeit des Fixpunkts und, da $\mathrm{id}(A+\phi) = (A+\phi)\,\mathrm{id}$ ist, gilt:

$$(\mathrm{id} + \xi)(\mathrm{id} + \eta) = (\mathrm{id} + \eta)(\mathrm{id} + \xi) = \mathrm{id}$$

und somit ist $\mathrm{id} + \eta$ auch tatsächlich ein Homöomorphismus.

q.e.d.

Nun kommen wir zu dem zentralen

# Satz von Hartman-Grobman

Seien $U \subset E$ offen, $f : U \mapsto E$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild und $0 \in U$ ein hyperbolischer Fixpunkt. Dann existiert eine offene Umgebung V von 0 in U und ein Homöomorphismus $h : V \cup f[V] \mapsto E$ auf sein Bild, sodass $h \circ f|_V = Df(0) \circ h|_V$ gilt.

Es sollte angemerkt werden, dass h kein Homöomorphismus im eigentlichen Sinne ist, da weder $f|_V$ noch $Df(0)|_V$ dynamische Systeme sind, weil sie im Allgemeinen keine Selbstabbildungen sind.

## Beweis:

Es reicht, die Aussage in einer Norm zu zeigen, und so wählen wir eine Boxnorm $|\cdot|$ , die an Df(0) mit Verzerrung $0 < \tau < 1$ adaptiert ist. Wir wollen möglichst das vorherige Lemma anwenden. Hierfür wählen wir eine Testfunktion $\alpha : E \mapsto \mathbb{R}$, die 1 auf $\overline{B(0; \frac{1}{3})}$, 0 auf $B(0; \frac{2}{3})^c$ abbildet und sonst Werte zwischen 0 und

1 annimmt. $\alpha$ ist glatt, wobei $|D\alpha(x)| \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}^+$ sei. Es sei $A := Df(0)$ und sei $\phi := f - A : U \mapsto E$. Offensichtlich ist $\phi$ stetig differenzierbar und es gilt $\phi(0) = 0$ und $D\phi(0) = 0$. Damit die Störung, die $\phi$ darstellt, klein genug ist, schränken wir jene auf einen Ball um 0 ein: Sei $\overline{\phi}(x) := \alpha(\frac{x}{r})\phi(x)$ für ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\overline{B(0;r)} \subset U$, das später noch verkleinert werden soll. Es ist klar, dass $\overline{\phi}$ stetig differenzierbar ist, und es gilt:

$$D\overline{\phi}(x) = D\alpha(\frac{x}{r})\frac{1}{r}\phi(x) + \alpha(\frac{x}{r})D\phi(x).$$

Des Weiteren gilt $\overline{\phi} \in C_b(E)$ mit $\overline{\phi}(x) = \phi(x)$ für $x \in \overline{B(0;\frac{r}{3})}$ und $\overline{\phi}(x) = 0$ für $x \in \overline{B(0;\frac{2r}{3})^c}$.

Wir behaupten, dass $Lip\overline{\phi} \longrightarrow 0$ für $r \longrightarrow 0$. Wegen des verallgemeinerten Schrankensatzes reicht es, $\sup_{x\in E} |D\overline{\phi}(x)| \longrightarrow 0$ für $r \longrightarrow 0$ zu zeigen. Es gilt:

$$|D\overline{\phi}(x)| \leq |D\alpha(\frac{x}{r})|\frac{1}{r}|\phi(x)| + |\alpha(\frac{x}{r})||D\phi(x)|$$

Da $\phi(0) = D\phi(0) = 0$, gilt:

$$\frac{|\phi(x)|}{|x|} = \frac{|\phi(x) - \phi(0) - D\phi(0)(x-0)|}{|x-0|} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow 0.$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, sodass für $x \in \overline{B(0;\delta)}$ gilt

$$|\overline{\phi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}|x| \text{ und } |D\overline{\phi}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\overline{\phi}(x) = 0$ für $x \in \overline{B(0;r)}^c$, können wir $|x| \leq r$ annehmen. Für $r < \delta$ gilt dann:

$$|D\overline{\phi}(x)| \leq B\frac{1}{r}\frac{\varepsilon}{2B}|x| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Nun wählen wir $r > 0$ klein genung, sodass

$$Lip\overline{\phi} < \min 1 - \tau, m(A)$$

auf ganz E gilt. Mit dem vorherigen Lemma existiert somit ein $\eta \in C_b(E)$, sodass id $+\eta : E \mapsto E$ ein Homöomorphismus ist und folgende Gleichung erfüllt ist:

$$(\mathrm{id} + \eta) \circ (A + \overline{\phi}) = A \circ (\mathrm{id} + \eta).$$

Wir wählen $h := \mathrm{id} + \eta$ und $V = \overline{B(0;\frac{r}{3})}$. Dann gilt:

$$h \circ f|_V = Df(0) \circ h|_V.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

q.e.d.

## Quellen

"Differentiable Dynamical Systems, An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity" von Lan Wen, ISBN: 9781470427993, 2016

Prof. Dr. Martin Schmidt: Dynamische Systeme und Stabilität, Skript zur Vorlesung FSS 2024 an der Universität Mannheim