# Persistenz der Hyperbolizität von Fixpunkten linearer Isomorphismen

Fabian Freyberger

Oktober 2024

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einführung** **3**

**2 Wichtige Definitionen** **3**

**3 Vorbereitungen** **4**

**4 Persistenz der Hyperbolizität** **8**

**5 Quellen** **10**

# 1 Einführung

In dieser Seminararbeit betrachten wir das Konzept der **Hyperbolizität** linearer Isomorphismen und die Persistenz dieser Eigenschaft unter Störungen. Insbesondere zeigen wir, dass lineare Abbildungen, die nahe eines hyperbolischen linearen Isomorphismus liegen, ebenfalls hyperbolisch sind.

Es wird Grundwissen über die Theorie Dynamischer Systeme vorausgesetzt.

Im Folgenden sei $E$ immer ein endlich-dimensionaler, normierter Vektorraum. Für das Infimum der Lipschitzkonstanten einer Abbildung $f : X \to Y$ wird die Notation $Lip f$ verwendet, d.h.:

$$Lip f = \inf\{L \geq 0 \mid d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X\}$$

Wegen " $\leq$ " ist das Infimum $Lip f$ weiterhin eine Lipschitzkonstante.

# 2 Wichtige Definitionen

**Definition 2.1** (Hyperbolischer Isomorphismus)**.** *Ein Isomorphismus $A : E \to E$ heißt **hyperbolisch**, falls E in einen stabilen und einen instabilen Unterraum zerfällt:*

$$E = E^s \oplus E^u$$

**Definition 2.2** (Hyperbolischer Fixpunkt)**.** *Sei $O \subset E$ eine offene Menge, und sei $f : O \to E$ eine $C^1$-Abbildung. Ein Fixpunkt $p \in O$ von $f$ heißt **hyperbolisch**, wenn die Ableitung $Df(p) : E \to E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphismus ist.*

**Definition 2.3** ($C^r$-Distanz)**.** *Seien $f, g : U \to E$ in $C^r$. Die $C^r-Distanz$ zwischen $f$ und $g$ ist gegeben als:*

$$d^r(f, g) = \max_{0 \leq k \leq r} \sup_{x \in U} \left| D^k f(x) - D^k g(x) \right|$$

**Definition 2.4** ($\mathcal{B}^1$)**.** *Die Menge $\mathcal{B}^1(f, \delta)$ sei die Menge der Diffeomorphismen. $g : U \to E$ mit*

$$d^1(g, f) \leq \delta$$

**Definition 2.5** (Angepasste Norm)**.** *Eine Norm $\|\cdot\|$ auf $E$, die die beiden Ungleichungen*

$$\|Av\| \leq \tau \|v\|, \quad \forall v \in E_s,$$

$$\|A^{-1}v\| \leq \tau \|v\|, \quad \forall v \in E_u.$$

*für ein $\tau \in (0, 1)$ erfüllt, wird als an $A$ **angepasst** bezeichnet. Wir nennen*

$$\tau(A) = \max\{\|A|_{E_s}\|, \|A^{-1}|_{E_u}\|\} < 1$$

*das **Schiefheitsmaß** von $A$ bezüglich dieser angepassten Norm.*

Den folgenden Satz wollen wir später in Verbindung zu den Ergebnissen zur Hyperbolizität setzen:

**Satz 2.6** (Persistenz eines hyperbolischen Fixpunktes)**.** *Sei $p \in U$ ein hyperbolischer Fixpunkt von $f$. Es gibt $\delta_0 > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$, so dass es für jedes $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta_0)$ in $B(p, \varepsilon_0)$ höchstens einen Fixpunkt gibt. Außerdem gilt: Für jedes $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existiert ein $0 < \delta \leq \delta_0$, so dass jedes $g \in \mathcal{B}^1(f, \delta)$ in $B(p, \varepsilon)$ mindestens einen (damit eindeutigen) Fixpunkt $p_g$ hat.*

**Bemerkung 2.7.** *Für $g \to f$ gilt $p_g \to p$.*
*$p_g$ verändert sich also stetig in $g$*

□

# 3 Vorbereitungen

Wir haben nun gesehen, dass hyperbolische Fixpunkte unter bestimmten Voraussetzungen erhalten bleiben. Um am Ende zeigen zu können, dass auch die Hyperbolizität erhalten bleibt, benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen.

**Definition 3.1** (Lipeomorphismus)**.** *Sei $(E, |\cdot|)$ und $(E', |\cdot|')$ zwei endlich-dimensionale normierte Vektorräume mit derselben Dimension.*
*Wir nennen einen Homöomorphismus $f : E \to E'$ einen **Lipeomorphismus**, wenn sowohl $f$ als auch $f^{-1}$ lipschitzstetig sind.*

**Definition 3.2.** *Wir definieren die **minimale Halbnorm** $m(A)$ einer linearen Abbildung $A : E \to E'$ als*

$$m(A) = \inf\{|Av|' : v \in E, |v| = 1\}.$$

*Es handelt sich um eine Halbnorm, da $m(A) = 0$ für $A \neq 0$ gelten kann.*

**Satz 3.3** (Invertierbarkeit)**.** *Sei $A : E \to E'$ ein linearer Isomorphismus, und sei $\varphi : E \to E'$ lipschitzstetig.*
*Wenn $Lip\,\varphi < m(A)$, dann ist $A + \varphi : E \to E'$ ein Lipeomorphismus und*

$$Lip((A+\varphi)^{-1}) \leq \frac{1}{m(A) - Lip\,\varphi}.$$

*Beweis.* Zuerst zeigen wir, dass $A + \varphi$ bijektiv ist, indem wir zeigen, dass für jedes $z \in E'$ die Gleichung

$$(A + \varphi)(x) = z$$

eine eindeutige Lösung hat.

$$A + \varphi(x) = A(x) + \varphi(x) = z \Leftrightarrow Ax = z - \varphi(x) \Leftrightarrow x = A^{-1}z - A^{-1}\varphi(x)$$

Hiermit definieren wir die Abbildung

$$T : E \to E,\ T(x) = A^{-1}z - A^{-1}\varphi(x)$$

und zeigen mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass diese einen eindeutigen Fixpunkt besitzt.
Es reicht die Kontraktion zu zeigen, da es sich offensichtlich um eine Selbstabbildung handelt.

Sei $x, y \in E$,

$|T(x) - T(y)| = |A^{-1}z - A^{-1}\varphi(x) - A^{-1}z + A^{-1}\varphi(y)| = |A^{-1}\varphi(y) - A^{-1}\varphi(x)|$

$\leq |A^{-1}||\varphi(y) - \varphi(x)| \leq |A^{-1}| \cdot Lip\,\varphi|y - x|$

Das zeigt bereits die Kontraktion, da:

$Lip\,\varphi|y - x| < m(A) \Leftrightarrow 1 > \frac{Lip\,\varphi}{m(A)} = Lip\,\varphi \cdot |A^{-1}|$

$A + \varphi$ ist zudem lipschitzstetig, da $A$ als lineare Abbildung insbesondere lipschitzstetig ist.
Nun zeigen wir, dass die Inverse lipschitzstetig mit der oben genannten Konstante ist.

$$|(A+\varphi)x - (A+\varphi)y| \geq |A(x-y)| - |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq (m(A) - \text{Lip }\varphi)|x - y|.$$

Wählen wir $x = (A + \varphi)^{-1}x'$ und $y = (A + \varphi)^{-1}y'$, so folgt:

$$\text{Lip}((A+\varphi)^{-1}) \leq \frac{1}{m(A) - \text{Lip }\varphi}.$$

□

Falls $\phi$ linear ist, so folgt mit dem Satz über die Invertierbarkeit, dass $A + \phi$ ein linearer Isomorphismus ist.

**Definition 3.4** (Box Metrik)**.** *Seien $A$ und $X$ zwei metrische Räume. Für den Produktraum $A \times X$ definieren wir die* ***Box Metrik*** *als*

$$d((a,x),(b,y)) = \max\{d(a,b), d(x,y)\}$$

**Satz 3.5** (Stetigkeit von Fixpunkten)**.** *Seien $A$ und $X$ zwei metrische Räume und $X$ vollständig. Sei $F : A \times X \to X$ eine Abbildung. Angenommen, es gibt $0 < \lambda < 1$ mit*

$$d(F(a,x), F(a,y)) \leq \lambda d(x,y)$$

*für jedes $a \in A$ und jedes $x, y \in X$. Sei $p(a)$ der (eindeutige) Fixpunkt von $F(a,\cdot)$. Dies ergibt eine Abbildung $p : A \to X$. Dann gilt für die Abbildung des Fixpunktes:*

*(1) Wenn $F$ stetig ist, ist auch $p$ stetig.*

*(2) Wenn $F$ Lipschitz-stetig ist, ist auch $p$ Lipschitz-stetig.*

*Beweis.* Seien $p(a), p(b)$ die jeweiligen Fixpunkte von $F(a,\cdot)$ und $F(b,\cdot)$, dann gilt:

$$d(p(a),p(b)) = d(F(a,p(a)), F(b,p(b)))$$

$$\leq d(F(a,p(a)), F(a,p(b))) + d(F(a,p(b)), F(b,p(b)))$$

$$\leq \lambda d(p(a),p(b)) + d(F(a,p(b)), F(b,p(b)))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$d(p(a),p(b)) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(F(a,p(b)), F(b,p(b)))$$

Hieraus folgen (1) und (2) direkt.

□

Wir werden später für die Zerlegung $E_s \oplus E_u$ von $A$ sehen, dass $B$ eine ähnliche Zerlegung $G_s \oplus G_u$ hat. Hierfür werden wir im folgenden Satz die Existenz einer linearen Abbildung beweisen, welche es uns ermöglichen wird, die Unterräume direkt zu charakterisieren. Dabei wird eine allgemeine Zerlegung $E_1 \oplus E_2$ betrachtet.
Es bezeichne im folgenden $\mathcal{L}(X,Y)$ den Banachraum der linearen Abbildungen von $X$ nach $Y$ und $\mathcal{L}(X,Y)(1)$ die abgeschlossene Einheitskugel um den Ursprung.

**Satz 3.6** (Graphen-Invarianz-Lemma)**.** *Sei $B : E \to E$ ein linearer Isomorphismus, der unter der direkten Summe $E = E_1 \oplus E_2$ dargestellt wird als: $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ wobei $B_{11}$ invertierbar sein muss.*
*Sei $|\cdot|$ eine Norm von $E$, die von Box-Typ in Bezug auf $E_1 \oplus E_2$ ist, und es existieren zwei Konstanten $\lambda > 0$ und $\varepsilon > 0$, so dass:*

$$\max\left(|B_{11}^{-1}|, |B_{22}|\right) < \lambda,$$
$$\max\left(|B_{12}|, |B_{21}|\right) < \varepsilon,$$
$$\lambda + \varepsilon < 1.$$

*Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $P = P_B : E_1 \to E_2$ mit $|P| \leq 1$, so dass der lineare Unterraum $\mathrm{gr}(P)$ $B$-invariant ist und $B|_{\mathrm{gr}(P)}$ $(\lambda^{-1} - \varepsilon)$-expandierend ist. Außerdem hängt $P_B$, und somit auch $\mathrm{gr}(P_B)$, stetig von $B$ ab.*

*Beweis.* Zunächst gilt

$$\lambda + \varepsilon < 1 \Leftrightarrow \lambda < 1 - \varepsilon \Leftrightarrow 1 < \lambda^{-1} - \lambda^{-1}\varepsilon$$
$$\Rightarrow 1 < \lambda^{-1} - \varepsilon$$

Diese Aussage benötigen wir für spätere Abschätzungen.

Sei $P : E_1 \to E_2$ linear mit $|P| \leq 1$. Sei $v \in E_1$.

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ Pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}v + B_{12}Pv \\ B_{21}v + B_{22}Pv \end{pmatrix}$$

Die Inklusion $B(\mathrm{gr}(P)) \subset \mathrm{gr}(P)$ gilt also genau dann, wenn

$$P\left(B_{11}v + B_{12}Pv\right) = B_{21}v + B_{22}Pv \quad \forall v \in E_1$$

Da $v$ beliebig ist, ist dies äquivalent zu:

$$P\left(B_{11} + B_{12}P\right) = B_{21} + B_{22}P$$

Wir wollen nun zeigen, dass $(B_{11} + B_{12}P)$ invertierbar ist.
Nach der Voraussetzung an $B$ und $P$ gilt:

$$|B_{12}P| \leq |B_{12}| \cdot |P| \leq \varepsilon$$

und

$$|B_{11}^{-1}| < 1 \Leftrightarrow m(B_{11}) \geq \lambda^{-1}$$

.

Dies erfüllt den Satz der Invertierbarkeit (3.3), da wegen $\varepsilon < 1$ und $\lambda^{-1} > \lambda$

$$|B_{12}P| < m(B_{11})$$

gilt. Also ist $(B_{11} + B_{12}P) : E_1 \to E_1$ invertierbar und mit

$$P\left(B_{11} + B_{12}P\right) = B_{21} + B_{22}P$$

folgt

$$P = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}$$

Hiermit definieren wir die Abbildung: $T = T_B : \mathcal{L}(E_1, E_2)(1) \to \mathcal{L}(E_1, E_2)$

$$T(P) = (B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}$$

Eine lineare Abbildung $P$ mit $T(B(\mathrm{gr}(P))) \subset \mathrm{gr}(P)$ zu finden, ist also nun ein Fixpunkt-Problem. Um zu beweisen, dass $T$ tatsächlich einen eindeutigen Fixpunkt besitzt, verwenden wir wieder den Banachschen Fixpunktsatz. Wir zeigen also, dass $T$ $\mathcal{L}(E_1, E_2)(1)$ auf sich selbst abbildet und kontrahierend ist.

(i) Selbstabbildung: Sei $P \in \mathcal{L}(E_1, E_2)(1)$.

$$|T(P)| = |(B_{21} + B_{22}P)(B_{11} + B_{12}P)^{-1}|$$

$$\leq |B_{21} + B_{22}P| \cdot |(B_{11} + B_{12}P)^{-1}|$$

$$\leq |B_{21} + B_{22}P| \cdot |(B_{11} + B_{12}P)^{-1}|$$

$$\leq (\varepsilon + \lambda)|(B_{11} + B_{12}P)^{-1}|$$

$$\leq \frac{\varepsilon + \lambda}{\lambda^{-1} - \varepsilon} < 1$$

Also haben wir die Selbstabbildung auf $\mathcal{L}(E_1, E_2)(1)$ gezeigt.

(ii) Kontraktion: Seien $P, P' \in \mathcal{L}(E_1, E_1)(1)$. Durch Umstellen erhalten wir:

$$T(P)(B_{11} + B_{12}P) = B_{21} + B_{22}P$$
$$T(P')(B_{11} + B_{12}P') = B_{21} + B_{22}P'$$

Über subtrahieren der zweiten Gleichung von der ersten erhalten wir:

$$(T(P) - T(P'))B_{11} + T(P)B_{12}P - T(P')B_{12}P' = B_{22}(P - P')$$

In diese Gleichung fügen wir $(T(P')B_{12}P - T(P')B_{12}P)$, also eine 0 ein:

$$(T(P) - T(P'))B_{11} + T(P)B_{12}P - T(P')B_{12}P + T(P')B_{12}P - T(P')B_{12}P' = B_{22}(P - P')$$

$$\Leftrightarrow (T(P) - T(P'))(B_{11} + B_{12}P) = B_{22}(P - P') - T(P')B_{12} + T(P')B_{12}P'$$

$$\Leftrightarrow T(P) - T(P') = (B_{22} - T(P')B_{12})(P - P')(B_{11} + B_{12}P)^{-1}$$

Wobei $(B_{11} + B_{12}P)$ wieder mit obiger Begründung invertierbar ist.

Wir nehmen die Norm auf beiden Seiten. Mit der selben Abschätzung für $(B_{11} + B_{12}P)^{-1}$ wie zuvor und

$$|B_{22} - T(P')B_{12}| \leq |B_{22}| + |T(P')||B_{12}| \leq \lambda + \varepsilon$$

folgt insgesamt durch Einsetzen der Abschätzungen:

$$|T(P) - T(P')| \leq \frac{\lambda + \varepsilon}{\lambda^{-1} - \varepsilon}|P - P'|$$

Damit ist gezeigt, dass $T$ kontrahierend ist.

Es gibt also nach dem Banachschen Fixpunktsatz eine eindeutige Abbildung $P$ mit

$$P = P_B \in \mathcal{L}(E_1, E_2), \text{ so dass } B(\mathrm{gr}(P)) \subset \mathrm{gr}(P)$$

Die umgekehrte Inklusion $\mathrm{gr}(P) \subset B(\mathrm{gr}(P))$ ist klar, da $B$ als Isomorphismus eine Basis vom Graphen wieder auf eine Basis abbildet. Also ist insgesamt gr(P) invariant unter $B$.

Zudem ist $B|_{\mathrm{gr}(P)}$ $(\lambda^{-1} - \varepsilon)$-expandierend, da:

$$|B(v, Pv)| = |B_{11}v + B_{12}Pv| \geq (\lambda^{-1} - \varepsilon)|v|$$

Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Isomorphismen, die die Bedingungen des Satzes erfüllen

$$T : \mathcal{B} \times L(E_1, E_2)(1) \to L(E_1, E_2)(1)$$

Dann gibt es $\varepsilon$ und $\lambda$, so dass die Bedingungen für alle $B \in \mathcal{B}$ gelten. Also ist $\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda^{-1}-\varepsilon}$ unabhängig vom Parameter $B$. Mit dem Satz über die Stetigkeit des Fixpunkts folgt also die Stetigkeit von $P_B$ und somit auch $\mathrm{gr}(P)$ in $B$. $\square$

# 4 Persistenz der Hyperbolizität

Mit den gezeigten Voraussetzungen können wir nun die beiden Hauptergebnisse beweisen.

**Satz 4.1** (Persistenz der Hyperbolizität einer linearen Abbildung). *Sei $A : E \to E$ ein hyperbolischer linearer Isomorphismus.*
*Es existiert ein $\delta_0 > 0$, so dass, wenn eine lineare Abbildung $B : E \to E$ die Bedingung $\|B - A\| < \delta_0$ erfüllt, folgendes gilt:*

*i. $B$ ist hyperbolisch.*

*ii. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für $\|B_1 - B_2\| < \delta$ gilt:*

$$\|P_{B_1} - P_{B_2}\| < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \|Q_{B_1} - Q_{B_2}\| < \varepsilon,$$

*wobei $P$ und $Q$ die eindeutigen linearen Abbildungen in den instabilen und stabilen Raum sind. Diese linearen Abbildungen variieren also stetig im Isomorphismus. Mit dem vorherigen Satz können wir die stabilen und instabilen Räume folgendermaßen charakterisieren:*
*$G_1^u = \mathrm{gr}(P_{B_1})$ und $G_1^s = \mathrm{gr}(Q_{B_1})$ und analog $G_2^u = \mathrm{gr}(P_{B_2})$ und $G_2^s = \mathrm{gr}(Q_{B_2})$*
*Wir sagen dann, dass sich die instabilen und stabilen Räume stetig in Abhängigkeit des Isomorphismus verändern.*

*Beweis.* Aufgrund der Äquivalenz von Normen reicht es, den Beweis für eine beliebige Norm zu führen. Wir wählen $\|\cdot\|$ auf $A$ adaptiert und von Box-Typ.
Sei $A : E \to E$ hyperbolisch mit der Zerlegung $E = E^s \oplus E^u$ und Schiefheitsmaß

$$0 < \tau(A) = \max\left\{\|A\big|_{E^s}\|, \|A^{-1}\big|_{E^u}\|\right\} < 1$$

Damit gilt offenbar

$$\|A_{uu}^{-1}\| \le \tau, \quad \|A_{ss}\| \le \tau, \quad A_{us} = A_{su} = 0.$$

Wir betrachten nun $B$ als eine Störung von $A$ durch $\phi$ linear, sodass $B$ den Satz der Invertierbarkeit erfüllt, d.h.:

$$\|A - B\| < \delta_0$$

für passendes $\delta_0$, welches wir nun genauer bestimmen

Um den vorherigen Satz auf die Situation anwenden zu können, wählen wir
$\tau < \lambda < 1$ und $\varepsilon > 0$ so dass $\lambda + \varepsilon < 1$.

Wir wählen nun $\delta_0$ so, dass die Bedingungen

$$\max\left(\|B_{uu}^{-1}\|, \|B_{ss}\|\right) < \lambda,$$

$$\max\left(\|B_{us}\|, \|B_{su}\|\right) < \varepsilon,$$

unter der direkten Summe $E = E^s \oplus E^u$ erfüllt sind

Dann existieren

$$P_B \in L(E^u, E^s)(1)$$

und

$$Q_B \in L(E^s, E^u)(1)$$

sodass $G^u = \mathrm{gr}(P_B)$ und $G^s = \mathrm{gr}(Q_B)$ beide unter $B$ invariant und entsprechend expandierend und kontrahierend sind.
Insbesondere gilt $G^u \cap G^s = \{0\}$. Da die beiden linearen Teilräume komplementäre Dimensionen haben, folgt, dass $E = G^u \oplus G^s$ ist. Somit ist $B$ hyperbolisch mit $E^s(B) = G^s$ und $E^u(B) = G^u$.
Ebenso folgt, wiederum aus dem Graphen-Invarianz-Lemma, dass die linearen Abbildungen $P_B$ und $Q_B$ sich stetig in $B$ verändern, woraus folgt, dass sich die jeweiligen Unterräume stetig verhalten.
Seien hierfür $B_1$, $B_2$ lineare Isomorphismen, die die Bedingungen des Satzes erfüllen.
Dann gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ sodass gilt

$$\|B_1 - B_2\| < \delta \implies \|P_{B_1} - P_{B_2}\| < C\|B_1 - B_2\| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|Q_{B_1} - Q_{B_2}\| < C\|B_1 - B_2\| < \varepsilon,$$

wobei wir $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ gewählt haben und $C > 0$ eine Konstante ist, die nur von $A$ abhängt.

Da $G_1^u = \mathrm{gr}(P_{B_1})$ und $G_1^s = \mathrm{gr}(Q_{B_1})$ und analog $G_2^u = \mathrm{gr}(P_{B_2})$ und $G_2^s = \mathrm{gr}(Q_{B_2})$ folgt die Aussage über die Stetigkeit der Räume direkt mit der von $\|\cdot\|$ induzierten Box-Metrik.

$\square$

Führen wir nun alle bisherigen Ergebnisse zusammen, erhalten wir, dass hyperbolische Fixpunkte sowie die Hyperbolizität unter kleinen Störungen erhalten bleibt. Dies wollen wir formalisieren:

**Satz 4.2** (Persistenz hyperbolischer Fixpunkte)**.** *Sei $p \in U$ ein hyperbolischer Fixpunkt von $A$. Dann existieren $\delta_0 > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$, so dass jede Abbildung $B \in B_1(A, \delta_0)$ in $B(p, \varepsilon_0)$ einen eindeutigen Fixpunkt $p_b$ hat, der hyperbolisch ist.*
*Außerdem variieren $p_b$, sowie die stabilen und instabilen Räume $E^s(p_b)$ und $E^u(p_b)$, stetig mit $B$.* $\square$

# 5 Quellen

Wen, Lan: Differentiable Dynamical Systems: A Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity