5. Übung

15. Natürlich natürlich.

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Zeige dann

(a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $n + m \in \mathbb{N}$, (2 Punkte)

(b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $nm \in \mathbb{N}$. (2 Punkte)

[Tipp: Benutze vollständige Induktion über $m \in \mathbb{N}$, für Teil (ii) darf (i) benutzt werden, auch wenn Aufgabe (i) nicht bewiesen wurde.]

16. Das Eckige im Runden.

(a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$ (2 Punkte)

(ii) $\frac{3+i}{4-i}$ (2 Punkte)

(iii) $\frac{(1+2i)^3 - (1+i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$ (3 Punkte)

(b) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden.

[Tipp: $z^3 - 1 = (z - 1) \cdot (z^2 + z + 1)$.] (3 Zusatzpunkte)

17. Runde Sache.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Gleichung

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

genau dann keine reelle Lösungen hat, wenn $|a| < 1$. Zeige außerdem, dass in diesem Fall die Gleichung zwei komplex konjugierte Lösungen hat, die in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ liegen.

[Tipp: Benutze die quadratische Ergänzung.] (4 Punkte)

18. Kunstkurs.

Beschreibe die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene, indem Sie die Mengen vorher geeignet umformen:

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ (2 Zusatzpunkte)

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < |z + 2|\}$ (3 Punkte)

19. Unwahre Umkehrungen.

(a) Untersuchen Sie die im Folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ (2 Punkte)

(ii) $b_n := \frac{1+n^2}{2+3n+n^2}$ (2 Punkte)

(iii) $c_n := \frac{2^n+3^n}{5^n}$ (2 Punkte)

(b) Man finde jeweils ein Beispiel für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ggf. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften, und zeige, dass das Beispiel tatsächlich die Eigenschaften besitzt.

(i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt, aber es gilt nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. (1 Punkt)

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$. (1 Punkt)

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$,
wobei $c \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Zahl ist. (1 Zusatzpunkt)

(iv) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. (2 Punkte)

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 06. Oktober 2023, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet oder in die beschrifteten Briefkästen eingeworfen werden. Das Übungsblatt in der Woche der Probeklausur wird ein Zusatzblatt, also nur aus Zusatzaufgaben zur Vorbereitung der Klausur bestehen. Die Zulassungsgrenze für dieses Jahr sind **185 Punkte**. Sollten Sie Probleme mit der Zulassung bekommen, melden Sie sich bitte bei Ihrem Tutor/Ihrer Tutorin oder dem Übungsleiter.