Martin Schmidt
Nicolas A. Hasse

Analysis I

21. September 2023

4. Übung

10. Unendlich beschränkt.

Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschränkt sind und bestimmen Sie (mit Begründung!) ihr Infimum und ihr Supremum. Untersuchen Sie auch, ob Infimum und Supremum jeweils Elemente der Menge (und damit ihr Minimum bzw. Maximum) sind.

(a) $A := \{\frac{x^2}{1+x^2} | x \in \mathbb{R}\}$. *(4 Punkte)*

(b) $B := (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. *(4 Punkte)*

(c) $C := \{\frac{1+n}{1+2n} | n \in \mathbb{N}\}$. *(4 Punkte)*

11. Doch recht viel Platz.

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$f : (-2,3) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{t+2} & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{t}{3-t} & \text{für } t > 0 \end{cases} .$$
(8 Punkte)

[Tipp: Man zeige, dass f das Intervall $(-2,0]$ bijektiv auf das Intervall $(-\infty,0]$, sowie das Intervall $(0,3)$ bijektiv auf das Intervall $(0,\infty)$ abbildet. Warum folgt daraus die Bijektivität von f?]

12. Potenzielles Wachstum.

Sei $\mathbf{K}$ ein angeordneter, archimedischer Körper. Zeige, dass für $b \in \mathbf{K}$ folgendes gilt:

(a) Ist $b > 1$, so gibt es zu jeder Zahl $K \in \mathbf{K}$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n > K.$$

[*Hinweis:* Benutzen Sie Bernoullis Ungleichung (Satz 2.32) und die archimedische Eigenschaft (Satz 2.45 (i))] *(3 Zusatzpunkte)*

(b) Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n < \varepsilon.$$

[*Hinweis:* Diese Aussage lässt sich aus (a) folgern.] *(2 Zusatzpunkte)*

(c) Sei nun $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Untersuchen für welches $b > 0$ die Menge $\{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Infimum, Supremum, Maximum, Minimum besitzt und bestimmen Sie diese gegebenenfalls. *(5 Punkte)*

13. Witty title

Sie wissen was Vereinigung $\cup$ ist. Aber es gibt auch *disjunkte Vereinigung* $\sqcup$. Das meint: beschriften Sie erstens die Elemente und machen Sie dann die Vereinigung. Zum Beispiel, seien $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ aber $A \sqcup B = \{1_A, 2_A, 2_B, 3_B\}$. Für endliche Menge gilt immer $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.

Sei A eine unendliche Menge.

(a) Zeigen Sie, dass A eine abzählbare Teilmenge B hat. *(3 Punkte)*

(b) Warum ist $B \sqcup \mathbb{N}$ abzählbar? *(1 Zusatzpunkt)*

(c) Wir wissen, dass $A = (A \setminus B) \cup B$ ist. Geben Sie ein bijektive Abbildung zwischen A und $A \sqcup \mathbb{N}$. Deshalb sind sie gleichmächtig. *(2 Zusatzpunkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 29. September 2023, 10:00 Uhr** in die beschrifeten Briefkästen eingeworfen oder per E-Mail an Ihren Tutor gesendet werden. Sollten Sie die Übungsblätter bei einem bestimmten Tutor/einer bestimmten Tutorin abholen wollen, schreiben Sie dies bitte auf das Übungsblatt.