

3. Übung

6. Elementare Rechenregeln.

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Regeln:

- (a) $(a < b \text{ und } c < d) \implies a + c < b + d.$ (2 Punkte)
- (b) $(0 < a < b \text{ und } 0 < c < d) \implies ac < bd.$ (2 Punkte)
- (c) $ab > 0 \iff (a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0).$ (4 Punkte)
- (d) $ab < 0 \iff (a > 0, b < 0 \text{ oder } a < 0, b > 0).$ (2 Punkte)

7. Eine Ecke mehr.

- (a) Zeigen Sie: Für $x > 0$ gilt $x + x^{-1} \geq 2.$ (3 Punkte)
- (b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die sog. *Parallelogrammungleichung*: $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|.$
[Tipp: Man zeige zuerst $|a + b| + |a - b| \geq 2|a|.$] (3 Punkte)

8. Grundschulmathematik.

Man zeige:

- (a) die berühmte Gaußsche Summenformel: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$ (3 Punkte)
- (b) $n^2 \leq 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 3.$ (3 Punkte)
- (c) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar. (3 Punkte)
[Tipp. Wenn $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so dass $10^n = 27m - 18n + 28.$]

9. Endlich beschränkt.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion: Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von einem angeordneten Körper \mathbb{K} besitzt ein Maximum. (Der Beweis für das Minimum geht analog.)

(3 Punkte)

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 22. September 2023, 10:00 Uhr** in die beschrifteten Briefkästen eingeworfen oder per E-Mail an Ihren Tutor gesendet werden.