

Kapitel 4

Einführung in die Differentialtopologie

Dieser Abschnitt enthält eine kleine Einführung in die sogenannte Differentialtopologie. Das ist die Theorie der qualitativen Aspekte von differenzierbaren Abbildungen (vgl. J.W.Milnor: "Topology from the differentiable viewpoint", Princeton Univ. Press).

4.1 Der Satz von Sard

Satz von Sard 4.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Bild $f[C]$ der Menge $C = \{x \in U \mid \text{Rang } T_x(f) < n\}$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^n .

Beweis: Für $n = 0$ ist $C = \emptyset$ und die Aussage gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ zeigen wir die Aussage mit vollständiger Induktion in $m \in \mathbb{N}_0$. Für $m = 0$ enthält C einen Punkt und die Aussage gilt. Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für $m - 1 \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Für $m \geq n$ betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge C_k aller Punkte, so dass alle partiellen Ableitungen höchstens k -ter Ordnung verschwinden. Diese Mengen sind ineinander enthalten: $C \supset C_1 \supset \dots \supset C_k \supset \dots$. Wir zeigen, dass erstens $f[C \setminus C_1]$, zweitens $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ für $k \in \mathbb{N}$ und drittens $f[C_k]$ für $k > \frac{m}{n} - 1$ Nullmengen sind. Dann ist auch $f[C] = f[C \setminus C_1] \cup f[C_1 \setminus C_2] \cup \dots \cup f[C_{k-1} \setminus C_k] \cup f[C_k]$ eine Nullmenge. Für $m < n$ ist $C = U$ und aus dem dritten Schritt folgt für $k = 0$ die Aussage.

1. Im Fall $n = 1$ ist $C_1 = C$ und $C \setminus C_1 = \emptyset$. Für $n > 1$ zeigen wir zuerst, dass jedes $y \in C \setminus C_1$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ enthält, so dass $f[V \cap (C \setminus C_1)]$ eine Nullmenge ist. Wegen $y \notin C_1$ ist mindestens eine erste partielle Ableitung von f bei y ungleich Null. Nach vertauschen der Komponenten können wir $\frac{\partial f_1(y)}{\partial x_1} \neq 0$ annehmen. Dann hat $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit $h(x) = (f_1(x), x_2, \dots, x_m)$ bei y eine invertierbare Ableitung und bildet wegen dem Satz der inversen Funktion eine offene Umgebung $V \subset U$ von y mit

einem Diffeomorphismus auf eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Sei $g = f \circ h^{-1}$. Die Punkte $x \in V'$ mit $\text{Rang}(T_x(g)) < n$ sind dann genau $C' = h[V \cap C]$, und $f[V \cap C] = g[C']$. Aufgrund der Definition von h und g bildet g die Hyperebene $H_t = \{t\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, für das diese Hyperebene nicht leer ist, nach $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Sei $g_t : H_t \rightarrow \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ die Einschränkung von g auf H_t . Auf V' dividiert $T(h^{-1})$ den Vektor $(1, 0, \dots, 0)$ durch $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \neq 0$ und $T(g)$ bildet ihn auf einen Vektor ab, dessen erster Eintrag nicht Null ist. Dann hat $T(g_t)$ bei $x \in H_t$ genau dann einen Rang $< n - 1$, wenn dort $T(g)$ einen Rang $< n$ hat, also wenn $h^{-1}(x)$ in C liegt. Nach Induktionsvoraussetzung ist das Bild $g_t[H_t \cap C']$ für alle diese Hyperebenen eine Nullmenge in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Weil C' als abgeschlossene Teilmenge von V' eine abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen ist, ist auch $g[C']$ eine abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen und damit messbar. Dann folgt aus dem Satz von Fubini, dass $g[C'] = f[V \cap C]$ eine Nullmenge ist. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C \setminus C_1$, deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C \setminus C_1]$ eine Nullmenge.

2. Für $y \in C_k \setminus C_{k+1}$ ist mindestens eine $(k + 1)$ -te partielle Ableitung ungleich 0. Nach Vertauschen der Komponenten können wir annehmen, dass für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ der Ordnung $k = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ und ein $r \in \{1, \dots, n\}$ die Funktion $w(x) = \partial^\alpha f_r(x)$ bei y verschwindet, aber $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ nicht. Wegen dem Satz der inversen Funktion bildet $x \mapsto h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_m)$ mit einem Diffeomorphismus eine offene Umgebung $V \subset U$ von y auf eine offene Teilmenge $V' \subset \mathbb{R}^m$ ab. Weil auf C_k alle k -ten partiellen Ableitungen verschwinden, bildet sie $C_k \cap V$ auf die Hyperebene $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \cap V'$ ab. Die Einschränkung $g|_H$ der Abbildung $g = f \circ h^{-1}$ auf H bildet laut Induktionsvoraussetzung alle Punkte $x \in H \cap V'$, an denen der Rang von $T(g|_H)$ kleiner als n ist, auf eine Nullmenge ab. Alle Punkte von $h[C_k \cap V]$ sind in dieser Menge enthalten. Deshalb ist $g|_H[h[C_k \cap V]] = f[C_k \cap V]$ eine Nullmenge. Weil jede solche Umgebung V von y einen Ball $B(z, r) \ni y$ mit $z \in \mathbb{Q}^m$ und $r \in \mathbb{Q}$ enthält, gibt es eine abzählbare Überdeckung von $C_k \setminus C_{k+1}$ deren Bilder unter f Nullmengen sind. Dann ist $f[C_k \setminus C_{k+1}]$ eine Nullmenge.

3. Wir zeigen dass $f[C_k]$ in \mathbb{R}^n für $k > \frac{m}{n} - 1$ eine Nullmenge ist. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm von \mathbb{R}^m und $Q = \overline{B(x, r)} \subset U$ ein abgeschlossener Ball bezüglich dieser Norm, also ein Quader mit den Kantenlängen $2r$. Weil f $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbar ist, gibt es wegen der Restgliedabschätzung im Satz von Taylor und der Kompaktheit von Q ein $c > 0$ mit

$$\|f(x + h) - f(x)\|_\infty \leq c \|h\|_\infty^{k+1} \quad \text{für alle } x \in C_k \cap Q \text{ und } x + h \in Q.$$

Wir unterteilen Q in l^m Quader mit Kantenlängen $\frac{2r}{l}$. Sei \tilde{Q} ein solcher Quader, der ein $x \in C_k$ enthält. Dann gilt $\|h\|_\infty \leq \frac{2r}{l}$ für jeden Punkt $x + h \in \tilde{Q}$. Mit der obigen

Abschätzung folgt, dass $f[\tilde{Q}]$ in einem abgeschlossenen Ball bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ mit dem Radius $c(\frac{2r}{l})^{k+1}$ enthalten ist, also höchstens das Volumen $(2c)^n(\frac{2r}{l})^{(k+1)n}$ hat. Dann hat $f[C_k \cap Q]$ höchstens das l^m fache Volumen $2^{n(k+2)}c^n r^{n(k+1)}l^{m-(k+1)n}$. Wegen $k+1 > \frac{m}{n}$ konvergiert diese obere Schranke im Grenzwert $l \rightarrow \infty$ gegen Null.

Im Fall $m < n$ und $C = U$ ist $f[U]$ wegen **3.** eine Nullmenge. **q.e.d.**

Die Aussage dieses Satzes gilt auch für $f \in C^l(U, \mathbb{R}^n)$ mit $l > \max\{0, m - n\}$. Um das zu zeigen muss im zweiten Schritt $g = f \circ h^{-1}$ auf H die Induktionsvoraussetzungen erfüllen. Dafür benötigt man ein weiteres Argument und die stärkere Bedingung $l > \max\{0, m - n\}$ anstatt der Bedingung $l \geq \frac{m}{n}$ aus dem dritten Schritt.

Korollar 4.2 (A.B. Brown). *Für eine glatte Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist $Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang } T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\}$ eine überall dichte (mit keiner offenen nichtleeren Menge schnittfremde) Teilmenge von Y .*

Beweis: Weil jede offene Teilmenge einen offenen Ball enthält, hat sie auch positives Volumen. Wegen dem Satz von Sard enthält dann jede offene Teilmenge von Y Punkte aus diesem Komplement. Damit ist das Komplement überall dicht. **q.e.d.**

Lemma 4.3. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine glatte Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit $\dim X \geq \dim Y$. Für reguläre Werte y von f , d.h.*

$$y \in f[X] \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang } T_x(f) < \dim T_{f(x)}Y\},$$

ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine $\dim X - \dim Y$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von X . Für $x \in f^{-1}[\{y\}]$ ist $T_x f^{-1}[\{y\}]$ der Kern von $T_x(f)$.

Beweis: Auf $f^{-1}[\{y\}]$ gilt $\text{Rang } T(f) = \dim Y$. Wegen Satz 1.44 ist $\text{Rang } T(f)$ auf einer Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ konstant. Dann ist $T_x(f)$ für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ surjektiv und die Aussagen folgen aus Korollar 1.46. **q.e.d.**

Wir wollen diese Aussagen jetzt auf Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern.

Korollar 4.4. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine glatte Abbildung von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit Rand auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit Y ohne Rand mit $\dim X > \dim Y$. Für reguläre Werte y von f , die auch reguläre Werte von $f|_{\partial X}$ sind, ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = f^{-1}[\{y\}] \cap \partial X$.*

Beweis: Die Aussage folgt aus der Anwendung von Lemma 4.3 auf f und $f|_{\partial X}$. **q.e.d.**

Satz 4.5. *Jede zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit X mit oder ohne Rand ist diffeomorph zu einem Intervall (d.h. $(0, 1)$, $[0, 1)$ oder $[0, 1]$) oder \mathbb{S}^1 .*

Beweis: Sei X eine eindimensionale Mannigfaltigkeit. Wir wählen einen Atlas von Karten mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Jede Funktion f_m verschwinde außerhalb einer kompakten Teilmenge des Definitionsbereiches U_m der Karte $\phi_m : U_m \rightarrow \mathbb{H}^1 = [0, \infty)$. Wir definieren eine Abbildung $g : TX \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$g(v) = \sum_{\{m|x \in U_m\}} |f_m(x)d\phi_m(v)| \quad \text{für alle } v \in T_x X.$$

Insbesondere ist $g^{-1}[\{0\}]$ der Nullschnitt von TX und g außerhalb des Nullschnittes glatt. Für alle $x \in X$ gibt es genau zwei $v \in T_x X$ mit $g(v) = 1$, die auseinander durch Multiplikation mit -1 hervorgehen. Jedes solche v setzt sich auf einer Umgebung von x eindeutig zu einem glatten Vektorfeld nach $g^{-1}[\{1\}]$ fort. Die Integralkurven dieser lokalen Vektorfelder sind Immersionen $\phi : I \rightarrow X$ auf Intervallen mit

$$g(T_t(\phi)(1)) = 1 \quad \text{für alle } t \in I \quad \text{und} \quad 1 \in T_t I \simeq \mathbb{R}.$$

Damit das Bild von ϕ auch Randpunkte von X enthalten kann, lassen wir Intervalle I mit Rand zu. Dann gibt es wegen Satz 2.5 für jedes $x \in X$ eine solche Integralkurve $\phi : I \rightarrow X$ mit $\phi(0) = x$ und $\phi^{-1}[\partial X] \subset \partial I$. Weil die Vektorfelder nach $g^{-1}[\{1\}]$ bis auf ein Vorzeichen eindeutig sind, erfüllen zwei Integralkurven $\phi_2 : I_2 \rightarrow X$ von solchen Vektorfeldern mit $\phi_1(t_1) = \phi_2(t_2)$ immer eine der beiden folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \phi_1(t+t_1) &= \phi_2(t+t_2) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap I_2 - t_2 \\ \phi_1(t+t_1) &= \phi_2(t_2 - t) && \text{für alle } t \in I_1 - t_1 \cap t_2 - I_2. \end{aligned}$$

Dann überträgt sich auch der Satz 2.7 und es gibt für jedes x ein maximales $\phi : I \rightarrow X$ mit $\phi(0) = x$, so dass alle anderen solchen $\tilde{\phi}$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$ Einschränkungen von ϕ auf ein Teilintervall von I , oder Einschränkungen von $t \mapsto \phi(-t)$ auf ein Teilintervall von $-I$ sind. Wenn ϕ einen Randpunkt von I nach $X \setminus \partial X$ abbildet, dann läßt sich ϕ über den Randpunkt von I hinaus fortsetzen. Deshalb bilden maximale ϕ Randpunkte von I auf Randpunkte von X ab. Insbesondere ist das Bild eines maximalen ϕ in X offen. Wenn $\phi(t_k)$ für eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ im Definitionsbereich I eines maximalen ϕ gegen $x \in X$ konvergiert, dann existiert ein solches $\tilde{\phi} : \tilde{I} \rightarrow X$ mit $\tilde{\phi}(0) = x$. Das Bild $\tilde{\phi}[\tilde{I}]$ ist eine Umgebung von x und enthält unendlich viele $\phi(t_k)$. Damit läßt sich ϕ so fortsetzen, dass $\phi[I]$ x enthält. Also ist $\phi[I]$ auch abgeschlossen. Wenn X zusammenhängend ist, ist ϕ surjektiv. Wenn $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ mit $t_1 < t_2$ gilt, dann folgt entweder $\phi(t+t_1) = \phi(t_2-t)$ oder $\phi(t+t_1) = \phi(t+t_2)$. Im ersten Fall folgt mit $t = \frac{t_2-t_1}{2} + \epsilon$

$$\phi\left(\frac{t_1+t_2}{2} + \epsilon\right) = \phi\left(\frac{t_1+t_2}{2} - \epsilon\right) \quad \text{für } |\epsilon| \leq \frac{t_2-t_1}{2}.$$

Da ϕ eine Immersion ist widerspricht das der lokalen Injektivität von ϕ bei $\frac{t_1+t_2}{2}$. Im zweiten Fall ist ϕ periodisch $\phi(t+\gamma) = \phi(t)$ mit Periode $\gamma = t_2 - t_1$. Weil ϕ als

Immersion lokal injektiv ist, gibt es eine kleinste positive Periode γ_{\min} von ϕ . Also ist ϕ entweder ein Diffeomorphismus oder induziert einen von $\mathbb{R}/\gamma_{\min}\mathbb{Z}$ nach X . **q.e.d.**

Lemma 4.6 (Hirsch). *Auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X mit Rand gibt es keine glatte Abbildung $f : X \rightarrow \partial X$ mit $f|_{\partial X} = \mathbf{1}_{\partial X}$.*

Beweis: Sei f eine solche Abbildung mit $f|_{\partial X} = \mathbf{1}_{\partial X}$. Wegen dem Satz von Sard gibt es ein $y \in \partial X$, so das $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Rand $\partial f^{-1}[\{y\}] = \{y\}$ ist. Das widerspricht Satz 4.5, wegen dem die kompakten eindimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand als disjunkten Vereinigungen von \mathbb{S}^1 und $[0, 1]$ und eine gerade Anzahl an Randpunkten haben. **q.e.d.**

Im Beweis vom Fixpunktsatz von Brouwer 3.34 kann dieses Lemma das Lemma 3.33 ersetzen. Die Existenz der Einschränkung $h|_{\overline{B(0,1)}}$ der dort konstruierten glatten Abbildung $h : B(0, r) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ mit $h|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathbf{1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ widerspricht Lemma 4.6.

4.2 Der Grad glatter Abbildungen

Definition 4.7. *Zwei glatte Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen glatt homotop, wenn es eine glatte Abbildung $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ gibt, mit $H(x, 0) = f(x)$ und $H(x, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$. Zwei solche Diffeomorphismen heißen glatt isotop, wenn $x \mapsto H(x, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ zusätzlich ein Diffeomorphismus ist.*

Zuerst zeigen wir, dass die zurückgezogenen Vektorraumbündel sich unter einer Homotopie nicht ändern. Deshalb sind dann auf \mathbb{R}^n alle Vektorraumbündel trivial.

Satz 4.8. *Sei (E, B, π) ein Vektorraumbündel. Für glatt homotope glatte Abbildungen $f, g : X \rightarrow B$ auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X sind f^*E und g^*E isomorph.*

Beweis: Sei $H : X \times [0, 1] \rightarrow B$ eine glatte Homotopie von $f = H(\cdot, 0)$ nach $g = H(\cdot, 1)$. Dann ist H^*E ein Vektorraumbündel über $X \times [0, 1]$ mit Projektion π . Es genügt offenbar zu zeigen, dass die beiden Vektorraumbündel $f^*E = \pi^{-1}[X \times \{0\}]$ und $g^*E = \pi^{-1}[X \times \{1\}]$ auf X isomorph sind. Weil $\{x\} \times [0, 1]$ für jedes $x \in X$ eine kompakte Teilmenge von $X \times [0, 1]$ ist, wird diese Menge von endlich viele kartesischen Produkten $U_j \times I_j$ von offenen Umgebungen von x mit offenen Teilintervallen I_j von $[0, 1]$ überdeckt, auf denen H^*E durch glatte Abbildungen trivialisiert wird:

$$\begin{array}{ccccc} F_j \times U_j \times I_j & \xrightarrow{\phi_j} & \pi^{-1}[U_j \times I_j] & \hookrightarrow & H^*E \\ p_2 \times p_3 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U_j \times I_j & \xrightarrow{\mathbf{1}_{U_j \times I_j}} & U_j \times I_j & \hookrightarrow & X \times [0, 1] \end{array}$$

Hierbei bezeichnet $p_2 \times p_3$ die Abbildung $(f, x, t) \mapsto (x, t)$ und die offenen Teilintervalle I_j überdecken $[0, 1]$. Dann gibt es $0 = t_0 < t_1 \dots < t_J = 1$, so dass $[t_{j-1}, t_j]$ jeweils in I_j enthalten ist. Für jedes $j = 1, \dots, J$, $x \in U_x = U_1 \cap \dots \cap U_J$ und $t \in [t_{j-1}, t_j]$ ist $\phi_j(\cdot, x, t) \circ \phi_j^{-1}(\cdot, x, t_{j-1})$ ein Isomorphismus von der Faser $\pi^{-1}[\{(x, t_{j-1})\}]$ von H^*E über (x, t_{j-1}) auf die Faser $\pi^{-1}[\{(x, t)\}]$ über (x, t) , der bei $t = t_{j-1}$ gleich $\mathbf{1}_{\pi^{-1}[\{(x, t_{j-1})\}]}$ ist. Wir definieren eine Abbildung ϕ_x auf $F_1 \times U_x \times [0, t_1]$ durch $\phi_1(\cdot, x, t) \circ \phi_1^{-1}(\cdot, x, 0)$ und induktiv in $j = 2, \dots, J$ auf $F_1 \times U_x \times [t_{j-1}, t_j]$ durch

$$\phi_x(f, x, t) = \phi_j(\cdot, x, t) \circ \phi_j^{-1}(\cdot, x, t_{j-1})(\phi_x(f, x, t_{j-1}))$$

Weil diese Abbildungen auf $\pi^{-1}[\{(x, t_{j-1})\}]$ jeweils mit dem schon definierten ϕ_x übereinstimmen, setzen sie sich mit $F_x = F_1$ zu einer glatten Trivialisierung

$$\begin{array}{ccccc} F_x \times U_x \times [0, 1] & \xrightarrow{\phi_x} & \pi^{-1}[U_x \times [0, 1]] & \hookrightarrow & H^*E \\ p_2 \times p_3 \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ U_x \times [0, 1] & \xrightarrow{\mathbf{1}_{U_x \times [0, 1]}} & U_x \times [0, 1] & \hookrightarrow & X \times [0, 1] \end{array}$$

von H^*E auf $U_x \times [0, 1]$ zusammen. Sei $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_0 = 0$ eine glatte Zerlegung der Eins zu der Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X , U_n jeweils das Element der Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$, von dem $\{x \in X \mid h_n(x) \neq 0\}$ eine kompakte Teilmenge ist, und ϕ_n die entsprechende Trivialisierung von H^*E auf $U_n \times [0, 1]$. Dann definiert $H_n = (\mathbf{1}_X \times (h_0 + \dots + h_n)) : X \rightarrow X \times [0, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ einen Diffeomorphismus von X auf ein Untermannigfaltigkeit von $X \times [0, 1]$. Für $n \in \mathbb{N}$ unterscheiden sich jeweils H_{n-1} und H_n nur auf einer kompakten Teilmenge von U_n . Insbesondere unterscheiden sich die beiden Vektorraumbündel $(H \circ H_{n-1})^*E$ und $(H \circ H_n)^*E$ nur auf U_n . Für $x \in U_n$ definieren

$$\begin{aligned} \phi_n(\cdot, H_n(x)) \circ \phi_n^{-1}(\cdot, H_{n-1}(x)) &: \pi^{-1}[\{H_{n-1}(x)\}] \rightarrow \pi^{-1}[\{H_n(x)\}], \\ \phi_n(\cdot, H_{n-1}(x)) \circ \phi_n^{-1}(\cdot, H_n(x)) &: \pi^{-1}[\{H_n(x)\}] \rightarrow \pi^{-1}[\{H_{n-1}(x)\}] \end{aligned}$$

zueinander inverse Isomorphismen zwischen Fasern von H^*E , die für $x \notin U_n$ mit $h_n(x) = 0$ gleich der Identität sind. Also sind $(H \circ H_{n-1})^*E$ und $(H \circ H_n)^*E$ für alle $n \in \mathbb{N}$ isomorph. Wegen der Eigenschaften der Zerlegung der Eins, induzieren diese Isomorphismen zwischen den Vektorraumbündeln $((H \circ H_n)^*E)_{n \in \mathbb{N}}$ im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ einen Isomorphismus $f^*E = (H \circ H_0)^*E \simeq (H \circ \lim_{n \rightarrow \infty} H_n)^*E = g^*E$. **q.e.d.**

Aus diesem Satz und Beispiel 1.62 folgt sofort folgendes Korollar:

Korollar 4.9. *Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit X heißt glatt zusammenziehbar, wenn $\mathbf{1}_X$ glatt homotop zu der konstanten Abbildung $X \rightarrow X$ auf ein $x_0 \in X$ ist. Auf solchen Mannigfaltigkeiten sind alle Vektorraumbündel trivial. **q.e.d.***

Beispiel 4.10. (i) Auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V ist $V \times [0, 1] \rightarrow V, (v, t) \mapsto (1 - t)v$ eine glatte Homotopie von $\mathbf{1}_V$ auf die konstante Abbildung auf die Null. Also ist V zusammenziehbar und alle Vektorraumbündel auf V sind trivial.
(ii) Wegen dem Satz vom Igel 3.24 ist $T\mathbb{S}^{2n}$ nicht trivial und \mathbb{S}^{2n} nicht zusammenziehbar.

Beispiel 4.13 wird zeigen, dass alle kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand nicht zusammenziehbar sind.

Für eine glatte Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen gleichdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist $f^{-1}[\{y\}]$ wegen Satz 1.37 eine diskrete Teilmenge von X , von der je zwei verschiedene Elemente disjunkte Umgebungen besitzen. Wenn X kompakt ist, hat diese Menge also nur eine endliche Anzahl $\#f^{-1}[\{y\}]$ an Elementen. Wir zeigen jetzt

Satz 4.11. Seien $f, g : X \rightarrow Y$ glatt homotope glatte Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, wobei X kompakt ist, keinen Rand hat und mit Y die gleiche konstante Dimension hat. Wenn $y \in Y$ ein regulärer Wert sowohl von f als auch von g ist, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ eine gerade Zahl.

Wenn Y zusammenhängend ist, dann ist $\#f^{-1}[\{y\}]$ bis auf eine gerade Zahl unabhängig von der Wahl von $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$.

Beweis: Sei $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine glatte Homotopie zwischen f und g . Wenn y zusätzlich nicht zu $\{F(x, t) \mid (x, t) \in X \times [0, 1] \text{ und } \text{Rang}(T_x(F)) < \dim Y\}$ gehört, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit mit dem Rand $(f^{-1}[\{y\}] \times \{0\}) \cup (g^{-1}[\{y\}] \times \{1\})$. Wegen Satz 4.5 enthält dieser Rand eine gerade Anzahl an Punkten und $\#f^{-1}[\{y\}] - \#g^{-1}[\{y\}]$ ist gerade.

Wegen der Voraussetzung an y und wegen dem Satz 1.44 und dem Satz der inversen Funktion sind die beiden Funktionen $z \mapsto \#f^{-1}[\{z\}]$ und $z \mapsto \#g^{-1}[\{z\}]$ auf einer kleinen Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard enthält diese Umgebung einen Punkt z in obiger Menge. Also gilt die erste Aussage. Für die zweite beutzen wir

Lemma 4.12. Seien $y, z \in Y$ Punkte einer zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dann bildet ein zu $\mathbf{1}_Y$ isotoper Diffeomorphismus von Y y auf z ab.

Beweis: Für je zwei Punkte in $(0, 1)$ gibt es eine streng monotone wachsende stückweise lineare Funktion, die außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0, 1)$ gleich $\mathbf{1}_{(0,1)}$ ist, und den einen Punkt auf den anderen abbildet. Dann gibt es auch einen Diffeomorphismus ϕ von \mathbb{R} auf sich selber, der außerhalb einer kompakten Teilmenge von $(0, 1)$ die identische Abbildung ist und den einen Punkt auf den anderen abbildet. Die Abbildung $(x, t) \mapsto tx + (1 - t)\phi(x)$ definiert dann eine glatte Isotopie von ϕ zu der Identität. Für jedes $z \in B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ liegt z für $\epsilon > 0$ mit $\|z\|(1 + 2\epsilon) < R$, $a = -\epsilon z$ und $r = R - \epsilon\|z\|$

und in $B(a, r) \subset B(0, R)$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto a + r\phi\left(\frac{\|x-a\|}{r}\right)\frac{x-a}{\|x-a\|}$, die a auf a abbildet, ein Diffeomorphismus von $B(0, R)$, der außerhalb einer kompakten Menge in $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ gleich $\mathbf{1}_{B(a,r)}$ ist und isotop zu $\mathbf{1}_{B(0,R)}$ ist. Für ein geeignetes ϕ bildet sie 0 auf z ab. Für gegebenes y gilt die Aussage mit einem solchen Diffeomorphismus für alle z im Urbild eines Balles unter einer Karte, die y auf das Zentrum des Balles abbildet. Weil die Aussage transitiv ist, ist dann die Menge der Punkte z , so dass die Aussage für ein gegebenes y gilt, offen und abgeschlossen, und damit gleich Y . **q.e.d.**

Fortsetzung des Beweises von Satz 4.11: Wegen dem Lemma gibt es für zwei Punkte $y, z \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ einen zu $\mathbf{1}_Y$ glatt isotopen Diffeomorphismus Φ von Y , der z auf y abbildet. Dann sind f und $g = \Phi \circ f$ glatt homotop mit $g^{-1}[\{z\}] = f^{-1}[\{y\}]$. Also folgt die zweite Aussage aus der ersten. **q.e.d.**

Dieser Satz zeigt, dass $\deg_2(f) = \#f^{-1}[\{y\}] \pmod{2}$ unabhängig von der Wahl des Punktes $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ ist und eine Homotopieinvariante von solchen glatten Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ definiert. Wenn f nicht surjektiv ist, dann ist die Anzahl für Werte y außerhalb des Bildes von f Null und damit $\deg_2(f) = 0 \pmod{2}$. Weil das Bild $f[X]$ immer kompakt ist, ist f nicht surjektiv wenn Y nicht kompakt ist, und $\deg_2(f) = 0 \pmod{2}$.

Beispiel 4.13. (i) Jede konstante Abbildung $f : X \rightarrow X$ hat $\deg_2(f) = 0 \pmod{2}$.

(ii) Die Identität einer kompakten Mannigfaltigkeit $\mathbf{1}_X$ hat $\deg_2(\mathbf{1}_X) = 1 \pmod{2}$.

(iii) Für $X = Y = \mathbb{S}^n$ folgt Lemma 4.6 für $X = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und damit der Brouwerschen Fixpunktsatz 3.34, weil jede glatte Abbildung $f : \overline{B(0,1)} \rightarrow \mathbb{S}^n$ mit $f|_{\mathbb{S}^n} = \mathbf{1}_{\mathbb{S}^n}$ eine glatte Homotopie von $\mathbf{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu einer konstanten Abbildung definiert.

Definition 4.14. Für eine glatte Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit X kompakt und $\dim X = \dim Y$ hängt das Vorzeichen von $\det(T_x(f))$ bei $x \in X$ nur von den Orientierungen von X und Y ab. Wir definieren

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}[\{y\}]} \frac{\det(T_x(f))}{|\det(T_x(f))|} \text{ für } y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}.$$

Satz 4.15. Seien $f, g : X \rightarrow Y$ glatt homotope glatte Abbildungen zwischen orientierten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit X kompakt, ohne Rand und der gleichen konstanten Dimension wie Y . Wenn $y \in Y$ sowohl ein regulärer Wert von f als auch von g ist, dann gilt $\deg(f, y) = \deg(g, y)$.

Wenn Y zusammenhängend ist, dann ist $\deg(f, y)$ unabhängig von der Wahl des regulären Wertes y von f .

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass für $y \in Y \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < \dim Y\}$ $\deg(f, y) = 0$ gilt, wenn X der Rand einer kompakten orientierten Mannigfaltigkeit Z ist und f sich zu einer glatten Abbildung $F : Z \rightarrow Y$ fortsetzt. Wenn $y \in Y$ zusätzlich nicht in $\{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \text{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ liegt, dann ist $F^{-1}[\{y\}]$ wegen Korollar 4.4 eine endliche Vereinigung von eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten von Z , deren Rand in $X = \partial Z$ liegt. Sei $A \subset F^{-1}[\{y\}]$ eine Zusammenhangskomponente mit nicht verschwindendem Rand $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. Die Orientierungen von Z und Y induzieren die Orientierung von A , deren äußeres Produkt mit der durch F zurückgezogenen nicht verschwindenden Volumenform von Y positiv proportional zu der nichtverschwindenden Volumenform von Z ist. Wegen Satz 4.5 ist A als eine kompakte zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ein abgeschlossenes Intervall, und die Orientierung von A zeigt an einem Ende aus A heraus und an dem anderen Ende nach A hinein. Daraus folgt, dass die Vorzeichen von $\det(T_a(f))$ und $\det(T_b(f))$ unterschiedlich sind, und deshalb $\deg(f, y)$ verschwindet. Für $y \in \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \text{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$ ist die Funktionen $y' \mapsto \deg(f, y')$ wegen Satz 1.37 auf einer Umgebung von y konstant. Wegen dem Satz von Sard gibt es in dieser Umgebung ein $y' \in Y \setminus \{F(z) \mid z \in Z \text{ mit } \text{Rang}(T_z(F)) < \dim Y\}$. Daraus folgt $\deg(f, y) = 0$, wenn sich f zu einem $F : Z \rightarrow Y$ fortsetzt.

Wenn f und g glatt homotop sind, dann sind f und g die Randwerte von $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $\partial(X \times [0, 1]) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$. Weil beide Randwerte bezüglich der Orientierung von $X \times [0, 1]$ umgekehrtes Vorzeichen haben folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt aus der ersten wie im Beweis von Satz 4.11. **q.e.d.**

Aus Satz 4.15 folgt ein zweiter Beweis des Satzes vom Igel 3.24:

Beweis: Wenn wir \mathbb{S}^n mit $\partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, dann wird in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ der Tangentialraum $T_x \mathbb{S}^n$ mit $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot x = 0\}$ identifiziert. Deshalb werden die Vektorfelder von \mathbb{S}^n durch Abbildungen

$$F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad x \cdot F(x) = 0$$

beschrieben. Für ungerades n beschreibt $x \mapsto (x_2, -x_1, x_3, -x_4, \dots, x_{n+1}, -x_n)$ ein solches glattes nicht verschwindendes Vektorfeld. Für gerades n dreht die Antipodenabbildung die Orientierung des \mathbb{R}^{n+1} um, und bildet die äußere Normale von $\overline{B(0, 1)}$ auf sich selber ab. Wegen Satz 3.30 (iii) hat sie den Grad -1 und ist wegen Satz 4.15 nicht glatt homotop zu $\mathbf{1}_{\mathbb{S}^n}$. Die Abbildung F zu einem glatten nichtverschwindenden Vektorfeld definiert aber folgende glatte Homotopie von $\mathbf{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu der Antipodenabbildung:

$$\mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad (x, t) \mapsto \cos(t\pi)x + \sin(t\pi) \frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

Für gerades n kann es also kein solches Vektorfeld F geben.

q.e.d.

4.3 Vektorfelder

In diesem Abschnitt untersuchen wir qualitative Aspekte von Vektorfeldern auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Lokal sieht jede differenzierbare Mannigfaltigkeit wie der \mathbb{R}^n aus. Deshalb betrachten wir zunächst Vektorfelder F auf dem \mathbb{R}^n mit einer isolierten Nullstelle. Sei also $F : B(x_0, R) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit $F(x_0) = 0$ und $F(x) \neq 0$ für $x \in B(x_0, R) \setminus \{0\}$. Dann definiert für alle $0 < r < R$ die Abbildung

$$\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{F(x_0 + rx)}{\|F(x_0 + rx)\|}$$

eine glatte Abbildung. Diese Abbildungen sind für alle $0 < r < R$ zueinander glatt homotop und haben deshalb den gleichen Grad. Den Grad dieser Abbildung bezeichnen wir als den $\text{Index}(F, x_0)$ des Vektorfeldes F an der isolierten Nullstelle x_0 .

Lemma 4.16. *Für ein glattes Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit einer isolierten Nullstelle bei $x_0 \in U$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ hat $T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}$ eine isolierte Nullstelle bei $\Phi(x_0)$ mit*

$$\text{Index}(T(\Phi) \circ F \circ \Phi^{-1}, \Phi(x_0)) = \text{Index}(F, x_0).$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass jeder orientierungserhaltende Diffeomorphismus Φ von \mathbb{R}^n glatt isotop zu $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$ ist. Nach Verkettung mit einer Translation haben wir $\Phi(0) = 0$.

$$F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, t) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t}\Phi(tx) & \text{für } t \in (0, 1] \\ T_0(\Phi) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

definiert dann eine Isotopie von dem linearen Isomorphismus $T_0(\Phi)$ nach Φ . Wegen $\Phi(0) = 0$ läßt sich $\Phi(x)$ schreiben als $\Phi(x) = x_1\phi_1(x) + \dots + x_n\phi_n(x)$ mit glatten Funktionen ϕ_1, \dots, ϕ_n . Dann ist $F(x, t) = x_1\phi_1(tx) + \dots + x_n\phi_n(tx)$ und deshalb auch bei $t = 0$ eine glatte Isotopie. Dann folgt die Aussage daraus, dass die Gruppe der linearen orientierungserhaltender Isomorphismen zusammenhängend ist.

Wenn Φ orientierungserhaltend ist, konstruieren wir mithilfe der Isotopie aus dem ersten Teil eine glatte Homotopie zwischen der Einbettung $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und dem Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das definiert eine glatte Homotopie zwischen den entsprechenden glatten Abbildungen von $\mathbb{S}^{n-1} \sim \partial B(x_0, R)$ nach \mathbb{S}^{n-1} . Dann folgt die Aussage aus Satz 4.15. Wenn Φ nicht orientierungserhalten ist, genügt es zu zeigen, dass der Index nicht von der Orientierung abhängt. Für den speziellen Fall $x_0 = 0$ und einer Reflektion einer Koordinate ändert sich der Grad nicht, weil die Ableitung der entsprechenden Abbildung von \mathbb{S}^{n-1} auf sich selber mit der Reflektion konjugiert wird, und deshalb die Determinante das Vorzeichen nicht ändert. **q.e.d.**

Wegen diesem Lemma ist der Index eines glatten Vektorfeldes einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit bei einer isolierten Nullstelle unabhängig von der Karte definiert.

Lemma 4.17. *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, also eine n -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand, und $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein glattes Vektorfeld mit isolierten Singularitäten, das auf ∂X nach Außen zeigt, also in den Karten in die obere Halbebene eine negative letzte Komponente hat. Dann ist*

$$\sum_{x \in F^{-1}\{0\}} \text{Index}(F, x)$$

gleich dem Grad der äußeren Normalen N , als glatte Abbildung von ∂X nach \mathbb{S}^{n-1} .

Beweis: Mithilfe des in Satz 3.30 (ii) konstruierten Kragens, können wir eine glatte Homotopie von einem glatten Vektorfeld, das auf ∂X nach Außen zeigt auf das dort definierte Vektorfeld $-N$ definieren. Wegen Satz 4.15 können wir dann annehmen, dass das Vektorfeld auf ∂X mit dieser äußeren Normalen übereinstimmt. Wir schneiden um jede isolierte Nullstelle eine kleinen Ball aus X heraus. Auf der entstehenden glatten Mannigfaltigkeit mit Rand definiert das normierte Vektorfeld eine glatte Abbildung nach \mathbb{S}^{n-1} , deren Grad auf dem Rand wegen des ersten Teils des Beweises von Satz 4.15 verschwindet. Dieser Grad ist die Summe des Grades der äußeren Normalen auf ∂X minus der Summe über die Indizes von dem Vektorfeld. **q.e.d.**

Allgemein kann man folgendes zeigen:

Satz von Poincare und Hopf 4.18. *Sei F ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit X , das nur isolierte Nullstellen hat, und wenn X einen Rand hat auf ∂X nach Außen zeigt. Dann ist die Summe der Indizes von F unabhängig von der Wahl eines solchen Vektorfeldes und gleich der sogenannten Eulercharakteristik von X :*

$$\sum_{x \in \text{Nullstellen von } F} \text{Index}(F, x) = \chi(X).$$

4.4 Pontryagins Kobordismen

Definition 4.19. *Zwei Untermannigfaltigkeiten Y und Z einer Mannigfaltigkeit X heißen kobordant, wenn sich die Untermannigfaltigkeiten mit Rand $Y \times [0, \epsilon)$ und $Z \times (1 - \epsilon, 1]$ von $X \times [0, 1]$ zu einer kompakten Untermannigfaltigkeit W mit Rand von $X \times [0, 1]$ fortsetzen läßt mit $\partial W = (Y \times \{0\}) \cup (Z \times \{1\})$.*

Definition 4.20. *Eine Rahmung einer Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ ist eine glatte Basis auf Y des orthogonalen Komplements von TY bezüglich der natürlichen Paarung zwischen $T_y X$ und $T'_y X$ als Unterbündel von $T'X|_Y$. Zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten Y und Z einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißen kobordant, wenn sich die beiden gerahmten Untermannigfaltigkeiten $Y \times [0, \epsilon)$ und $Z \times (1 - \epsilon, 1]$ von $X \times [0, 1]$ zu einer gerahmten kompakten Untermannigfaltigkeit fortsetzen.*

Definition 4.21. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine glatte Abbildung und $y \in \mathbb{S}^n$ kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < n\}$. Dann ist $f^{-1}[\{y\}]$ eine Untermannigfaltigkeit. Für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ bildet die duale Abbildung von $T_x(f)$ eine orientierte Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ auf eine Basis des orthogonalen Komplements von $T_x f^{-1}[\{y\}]$ in $T'_x X$ ab. Jede orientierte Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ induziert also eine Rahmung von $f^{-1}[\{y\}]$. Die gerahmte Untermannigfaltigkeit $f^{-1}[\{y\}] \subset X$ heißt Pontryaginmannigfaltigkeit von f .

Wir beweisen in diesem Abschnitt folgenden Satz

Satz 4.22. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine glatte Abbildung auf einer m -dimensionalen zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit X mit $m \geq n$. Dann gilt:

- A** Seien $y, z \in \mathbb{S}^n \setminus \{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < n\}$. Dann sind die beiden Pontryaginmannigfaltigkeiten $f^{-1}[\{y\}]$ und $f^{-1}[\{z\}]$ kobordant.
- B** Zwei Abbildungen $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ sind genau dann glatt homotop, wenn die entsprechenden Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant sind.
- C** Jede kompakte gerahmte Untermannigfaltigkeit von X der Dimension $m - n$ ist die Pontryaginmannigfaltigkeit einer glatten Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$.

Beweis: 1. Eine orientierte Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ bildet eine orientierte Basis des orthogonalen Komplementes von y in \mathbb{R}^{n+1} . Wenn wir diese orthogonale Komplement mit \mathbb{R}^n identifizieren, dann setzt sich eine orientierte Basis zu einer $n \times n$ Matrix mit positiver Determinante zusammen. Dadurch werden die orientierten Basen von $T_y\mathbb{S}^n$ sogar mit allen $n \times n$ Matrizen mit positiver Determinante identifiziert. Weil diese offene Menge der $n \times n$ Matrizen zusammenhängend ist, hängt die Klasse der kobordanten Pontryaginmannigfaltigkeiten $f^{-1}[\{y\}]$ nicht von der orientierten Basis von $T_y\mathbb{S}^n$ ab.

2. Sei jetzt y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < n\}$. Wegen dem Rangsatz 1.44 ist diese Menge abgeschlossen. Deshalb gibt es einen offenen Ball um y der nur solche Elemente enthält. Für ein z aus diesem Ball wählen wir eine glatte Familie $(r_t)_{t \in [0,1]}$ von Rotationen von \mathbb{R}^{n+1} , die auf $t \in [0, \epsilon)$ konstant gleich der Identität sind, auf $t \in (1 - \epsilon, 1]$ konstant gleich einer Rotation, die y auf z abbildet, und y für alle $t \in [0, 1)$ nur auf Punkte auf dem Großkreis durch y und z , also innerhalb der Balles abbildet. Für die glatte Homotopie $F(t, x) = r_t \circ f(x)$ ist z ein regulärer Wert, und $F^{-1}[\{z\}]$ ein Kobordismus der gerahmten Untermannigfaltigkeit $f^{-1}[\{z\}]$ auf $f^{-1}[\{y\}]$. Also sind diese Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant.

3. Wenn f und g zwei glatt homotope glatte Abbildungen von X nach \mathbb{S}^n sind, dann wählen wir eine Homotopie F von f nach g , die auf $t \in [0, \epsilon)$ konstant gleich f ist und auf $t \in (1 - \epsilon, 1]$ konstant gleich g . Für ein y , das weder zu $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < n\}$ noch zu $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(g)) < n\}$ gehört, gibt

es wegen dem Satz von Sard ein z in jeder kleinen Umgebung von y , das nicht zu $\{F(x, t) \mid (x, t) \in X \times [0, 1] \text{ mit } \text{Rang}(T_{(x,t)}(F)) < n\}$ gehört. Dann ist $F^{-1}[\{z\}]$ ein Kobordismus von $f^{-1}[\{z\}]$ nach $g^{-1}[\{z\}]$. Wegen **2.** sind dann $f^{-1}[\{y\}]$ und $g^{-1}[\{y\}]$ kobordant.

Beweis von A: Für zwei y, z die nicht zu $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < n\}$ gehören, wählen wir eine glatte Isotopie von $\mathbf{1}_{\mathbb{S}^n}$ zu einer Rotation, die y auf z abbildet. Dann sind $f^{-1}[\{y\}]$ und $f^{-1}[\{z\}]$ wegen **3.** kobordant.

Beweis von C: Sei $Y \subset X$ eine $m-n$ dimensionale kompakte gerahmte Untermannigfaltigkeit ohne Rand. Dann besitzt wegen Satz 1.45 eine offenen Umgebung von $Y \subset X$ einen Atlas von Karten, die jeweils Y auf $\mathbb{R}^{m-n} \subset \mathbb{R}^m$ abbilden. Wenn wir die Basen von \mathbb{R}^m mit den invertierbaren $m \times m$ Matrizen, und damit mit Diffeomorphismen vom \mathbb{R}^m identifizieren, dann entspricht der Rahmen von Y in den Koordinaten dieser Karten einer glatte Abbildung von Y in die linearen Diffeomorphismen von \mathbb{R}^n . Eine solche Abbildung induziert auch einen Diffeomorphismus von $Y \times \mathbb{R}^n$, der auf $Y \times \{0\}$ gleich der Identität ist. Die Verkettung der Karten mit diesem Difeomorphismus definiert dann auf einer Umgebung einer $(m-n)$ -dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeit Y von X einen Atlas von Karten von X , die Y auf \mathbb{R}^{m-n} und auf Y den Rahmen auf die Einsformen dx_{m-n+1}, \dots, dx_m abbilden. Mit einer Zerlegung der Eins erhalten wir dann einen Diffeomorphismus von dem kartesischen Produkt von Y mit einem Ball $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Untermannigfaltigkeit von X , dessen Einschränkung auf $Y \times \{0\}$ die Identität von Y ist, so dass der Rahmen durch die Koordinateneinsformen von \mathbb{R}^n gegeben ist. Die Verkettung mit dem Diffeomorphismus $x \mapsto \frac{\epsilon^2 x}{\epsilon^2 - \|x\|^2}$ von $B(0, \epsilon)$ nach \mathbb{R}^n ergibt einen Diffeomorphismus Φ von $Y \times \mathbb{R}^n$ auf eine offenen Untermannigfaltigkeit V von X , der die gerahmte Untermannigfaltigkeit $Y \times \{0\}$ auf Y abbildet. Dann gibt es eine eindeutige glatte Abbildung $g : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g(\Phi(y, t)) = t$ für alle $(y, t) \in Y \times \mathbb{R}^n$. Sei h eine glatte Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, die die Punkte außerhalb von $B(0, 1)$ auf einen Punkt $y \in \mathbb{S}^n$ abbildet, und $B(0, 1)$ glatt auf $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ immersiert. Dann ist Y die Pontryaginmannigfaltigkeit $f^{-1}[\{y\}]$ von $f = h \circ g$.

4. Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ zwei glatte Abbildungen und y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < n\}$ und $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(g)) < n\}$ mit $Y = f^{-1}[\{y\}] = g^{-1}[\{y\}]$. Für eine Basis von $T_y \mathbb{S}^n$ sind dann die entsprechenden Rahmen genau dann gleich, wenn $T_x(f) = T_x(g)$ für alle $x \in f^{-1}[\{y\}]$ gilt. Wir zeigen in diesem Fall, dass f glatt homotop zu einer Abbildung $X \rightarrow \mathbb{S}^n$ ist, die auf einer Umgebung von Y mit g übereinstimmt. Dazu wählen wir wieder einen Diffeomorphismus Φ von $Y \times \mathbb{R}^n$ auf eine offene Umgebung von $Y \subset X$, die die gerahmte Untermannigfaltigkeiten Y auf sich selber abbildet. Wir können dabei das Bild von Φ so klein wählen, dass sowohl f als auch g das Bild von Φ in das Komplement von $-y \in \mathbb{S}^n$ abbilden. Die Verkettung einer Rotation mit der stereographischen Projektion ist dann ein Diffeomorphismus Ψ von $\mathbb{S}^n \setminus \{-y\}$ nach \mathbb{R}^n , die y auf 0 abbildet. Die beiden Abbildungen $\tilde{f} = \Psi \circ f \circ \Phi$

und $\tilde{g} = \Psi \circ g \circ \Phi$ sind glatte Abbildungen von $Y \times \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R}^n , die $Y \times \{0\}$ auf 0 abbilden, und deren Ableitungen auf $Y \times \{0\}$ übereinstimmen. Dann genügt es zu zeigen, dass \tilde{f} glatt homotop zu einer Abbildung $Y \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist, die auf $Y \times B(0, 1)$ mit \tilde{g} übereinstimmt, und auf $Y \times (\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2))$ mit \tilde{f} übereinstimmt. Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die auf $[0, 1]$ gleich Null ist und auf $[2, \infty)$ gleich Eins. Dann ist

$$F((x, s), t) = (1 - t)\tilde{f}(x, s) + t(h(\|s\|))\tilde{f}(x, s) + (1 - h(\|s\|))\tilde{g}(x, s)$$

eine glatte Homotopie von \tilde{f} auf eine solche Funktion von $Y \times \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R}^n .

5. Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ zwei glatte Abbildungen und y kein Element von $\{f(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(f)) < n\}$ und $\{g(x) \mid x \in X \text{ mit } \text{Rang}(T_x(g)) < n\}$ mit $Y = f^{-1}[\{y\}] = g^{-1}[\{y\}]$, so dass f und g auf offenen Umgebungen von $Y \subset X$ übereinstimmen. Die Verkettung einer Rotation mit der stereographischen Projektion ist ein Diffeomorphismus Ψ von $\mathbb{S}^n \setminus \{y\}$ nach \mathbb{R}^n . Dann sind $\tilde{f} = \Psi \circ f$ und $\tilde{g} = \Psi \circ g$ glatte Abbildungen von $X \setminus Y$ nach \mathbb{R}^n . Weil f und g auf einer Umgebung von $Y \subset X$ übereinstimmen, ist folgende Abbildung eine glatte Homotopie von f nach g

$$F(x, t) = \Psi^{-1}((1 - t)\tilde{f}(x) + t\tilde{g}(x)).$$

Beweis von B: Wenn f und g glatt homotop sind, dann zeigt **3.**, dass die entsprechenden Pontryaginmannigfaltigkeiten kobordant sind. Wenn umgekehrt zwei gerahmte Untermannigfaltigkeiten von X kobordant sind, dann definiert die Konstruktion in dem **Beweis von C** für die entsprechende gerahmte Untermannigfaltigkeit von $X \times [0, 1]$ mit Rand eine glatte Homotopie von einer Abbildung \tilde{f} auf eine Abbildung \tilde{g} , deren Pontryaginmannigfaltigkeiten mit denen von f bzw. g übereinstimmen. Aus **4.** und **5.** folgt, dass f und \tilde{f} bzw. g und \tilde{g} und damit f und g glatt homotop sind. **q.e.d.**

Ein analoger Satz gilt auch für Mannigfaltigkeiten X mit Rand. In diesem Fall wird zusätzlich gefordert, dass der Rand auf einen fest gewählten Basispunkt von \mathbb{S}^n abgebildet wird.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich einige Aussagen über die Homotopiegruppen von Mannigfaltigkeiten treffen, deren Elemente gerade die Homotopieklassen von Abbildungen nach \mathbb{S}^n sind. Das führt nur in einigen Fällen zu einem befriedigenden Verständnis der Homotopiegruppen. Im Fall $\dim X = n$ bestehen die Pontryaginmannigfaltigkeiten nur aus endlich vielen Punkten mit einem Vorzeichen. Zwei solche endliche Teilmengen sind genau dann kobordant, wenn die Summe der Vorzeichen gleich ist.

Satz von Hopf 4.23. *Auf einer n -dimensionalen kompakten orientierten Mannigfaltigkeit X sind zwei glatte Abbildungen $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ genau dann glatt homotop, wenn die Grade aus Satz 4.15 gleich sind.* **q.e.d.**

Daraus läßt sich mithilfe der Theorie der Überlagerungen auch folgern, dass zwischen kompakten n -dimensionalen nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten zwei glatte Abbildungen genau dann glatt homotop sind, wenn die Grade aus Satz 4.11 gleich sind.