Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Multilineare Algebra

Definition 3.1. *Seien $V_1, \ldots, V_n$ und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Dann heißt $A : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ n–linear wenn für alle $i = 1, \ldots, n$ folgendes gilt*

$$A((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = A((x_1, \ldots, x_n)) + A((x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n))$$
$$A((x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = \lambda A((x_1, \ldots, x_n)) \text{ für } x, y \in V_1 \times \cdots \times V_n, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Die punktweise Addition und Skalarmultiplikation macht diesen Raum $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)$ aller n–linearen Abbildungen von $V_1 \times \ldots \times V_n$ nach W zu einem Vektorraum.

Definition 3.2. *Für endlichdimensionale Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ über $\mathbb{K}$ definiert*

$$V_1' \otimes \ldots \otimes V_n' = \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; \mathbb{K}).$$

das Tensorprodukt von $V_1', \ldots, V_n'$. Für Elemente $(A_1, \ldots, A_n) \in V_1' \times \ldots \times V_n'$ ist

$$A_1 \otimes \ldots \otimes A_n : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{K}, \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto A_1(v_1) \cdots A_n(v_n)$$

ein Element von $V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$. Die Elemente dieser Form heißen kohärente Vektoren.

Für endlichdimensionale $V_1, \ldots, V_n$ ist die lineare Hülle der kohärenten Vektoren von $V_1' \otimes \ldots \otimes V_n'$ das ganze Tensorprodukt. Für die Definition des Tensorprodukt von unendlichdimensionalen Vektorräumen werden zusätzliche Bedingungen gestellt. Die lineare Hülle der kohärenten Vektoren bildet im allgemeinen einen dichten Unterraum. Im Folgenden sei mit Vektorraum immer ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum gemeint. Wir definieren des öfteren lineare Abbildungen nur auf den kohärenten Vektoren. Das definiert eindeutige lineare Abbildungen auf den ganzen Tensorprodukten.

Auf dem n–fachen Tensoprodukt $V'^{\otimes n}$ des Dualraumes V' eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes mit sich selber wirkt die symmetrische Gruppe S_n aller Permutationen von n Elementen. Auf $\mathbb{K}$ wird S_n erinerseits trivial und andererseits alternierend dargestellt:

$$S_n \to \{1\}, \quad \sigma \mapsto 1 \qquad\qquad S_n \to \{1,-1\}, \quad \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma),$$

wobei $\operatorname{sgn}(\sigma)$ gleich ± 1 ist je nachdem ob sich σ schreiben lässt als das Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen. Entsprechend enthält $V'^{\otimes n}$ zwei lineare Unterräume, nämlich aller Vektoren, die sich unter der Wirkung der Permutationsgruppe S_n wie die triviale bzw. die alternierende Darstellung transformieren.

Definition 3.3. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ wirkt die Permutationsgruppe S_n auf $V'^{\otimes n}$ durch*

$$A \mapsto \sigma.A \textit{ mit } \quad \sigma.A : V^n \to \mathbb{K} \quad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto A\left(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}\right)$$

für alle $A \in V'^{\otimes n}$ und $\sigma \in S_n$. Auf den kohärenten Vektoren wirkt $\sigma \in S_n$ dann wie

$$\begin{aligned}\sigma.(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n)(v_1, \ldots, v_n) &= A_1(v_{\sigma^{-1}(1)}) \cdots A_n(v_{\sigma^{-1}(n)}) = \\ &= A_{\sigma(1)}(v_1) \cdots A_{\sigma(n)}(v_n) = (A_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes A_{\sigma(n)})(v_1, \ldots, v_n) \textit{ für } (v_1, \ldots, v_n) \in V^n.\end{aligned}$$

Die symmetrischen und antisymmetrischen Tensorprodukte sind definiert als

$$\begin{aligned} S^n V' &= \{A \in V'^{\otimes n} | \sigma.A = A \textit{ für alle } \sigma \in S_n\} \\ \bigwedge^n V' &= \{A \in V'^{\otimes n} | \sigma.A = \operatorname{sgn}(\sigma) A \textit{ für alle } \sigma \in S_n\}. \end{aligned}$$

Mit SV' und $\bigwedge V'$ bezeichnen wir die direkten Summen

$$SV' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n V' \quad \textit{und} \quad \bigwedge V' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n V'.$$

Dabei bezeichnet $S^0 V' = \mathbb{K}$ und $\bigwedge^0 V' = \mathbb{K}$ im Tensorprodukt $V'^{\otimes 0} = \mathbb{K}$.

Satz 3.4. *Für einen n–dimensionaler $\mathbb{K}$–Vektorraum V gibt es bilineare Abbildungen*

$$\bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A, B) \mapsto A \wedge B$$

so dass $\bigwedge V'$ zu einer distributiven $\mathbb{K}$–Algebra wird. In dieser Algebra gilt

$$B \wedge A = (-1)^{pq} A \wedge B \textit{ für alle } A \in \bigwedge^p V' \textit{ und } B \in \bigwedge^q V'.$$

Für alle $p = 0, \ldots, n$ haben sie die Dimensionen $\dim \bigwedge^p V' = \binom{n}{p}$ *und* $\dim \bigwedge V' = 2^n$.

Beweis: Wir definieren die Abbildung

$$\bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A,B) \mapsto A \wedge B = \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) \quad \text{mit}$$
$$\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma.(A \otimes B).$$

Dann gilt $\mathcal{A}^p(A) = p!A$ für alle $A \in \bigwedge^p V'$ und $\frac{1}{p!}\,\mathcal{A}^p : V'^{\otimes p} \to \bigwedge^p V'$ mit $A \mapsto \frac{1}{p!}\,\mathcal{A}^p(A)$ ist eine Projektion von $V'^{\otimes p}$ auf dem Unterraum $\bigwedge^p V' \subset V'^{\otimes p}$. Offenbar gilt

$$\mathcal{A}^{p+q}(\mathcal{A}^p(A) \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathcal{A}^{p+q}(\sigma.A \otimes B) = \sum_{\sigma \in S_p} \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = p!\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B)$$
$$\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes \mathcal{A}^q(B)) = \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sgn}(\sigma)\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes \sigma.B) = \sum_{\sigma \in S_q} \mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B) = q!\,\mathcal{A}^{p+q}(A \otimes B)$$

für alle $A \in V'^{\otimes p}, B \in V'^{\otimes q}$. Daraus folgt für alle $A \in \bigwedge^p V'$, $B \in \bigwedge^q V'$ und $C \in \bigwedge^r V'$

$$\begin{aligned} C \wedge (B \wedge A) &= \frac{1}{(p+q)!r!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}\left(C \otimes \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q}(B \otimes A)\right) = \frac{1}{r!p!q!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}(C \otimes B \otimes A) \\ &= \frac{1}{(q+r)!p!}\,\mathcal{A}^{p+q+r}\left(\frac{1}{q!r!}\,\mathcal{A}^{q+r}(C \otimes B) \otimes A\right) = (C \wedge B) \wedge A. \end{aligned}$$

Also ist $\wedge$ ein assoziatives Produkt. Induktiv in n folgt für alle $A_1, \ldots, A_n \in V'$

$$\begin{aligned} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n &= \tfrac{1}{(n-1)!1!}\,\mathcal{A}^n\left((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1})) \otimes A_n\right) \\ &= \tfrac{1}{(n-1)!}\,\mathcal{A}^n\left(\mathcal{A}^{n-1}(A_1 \otimes \ldots \otimes A_{n-1}) \otimes A_n\right) = \mathcal{A}^n(A_1 \otimes \ldots \otimes A_n). \end{aligned}$$

Die Distributivität folgt aus der Bilinearität der Abbildung

$$\wedge : \bigwedge^p V' \times \bigwedge^q V' \to \bigwedge^{p+q} V', \quad (A,B) \mapsto A \wedge B.$$

Für alle $p, q \in N$ hat folgende Permutation

$$(1, \ldots, p+q) \to (p+1, \ldots, p+q, 1, \ldots, p)$$

die Signatur $(-1)^{pq}$ weil sie aus pq–Transpositionen zusammengesetzt werden kann. Dann folgt für alle $A \in \bigwedge^p V'$ und $B \in \bigwedge^q V'$

$$B \wedge A = \frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(B \otimes A) = (-1)^{pq}\frac{1}{p!q!}\,\mathcal{A}(A \otimes B) = (-1)^{pq} A \wedge B.$$

Sei $E_1, \ldots, E_n$ eine Basis von V'. Dann gilt offenbar

$$E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p} = \operatorname{sgn}(\sigma) E_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge E_{i_{\sigma(p)}} \quad \text{für alle } \sigma \in S_p.$$

Wenn zwei Indizes gleich sind, dann gibt es eine Transposition, unter der dieses äußere Produkt das Vorzeichen wechselt. Wenn alle Indizes paarweise verschieden sind, dann sind $\{E_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes E_{i_{\sigma(p)}} \mid \sigma \in S^p\}$ linear unabhängig, und $E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p} \neq 0$. Also bilden $E_{i_1} \wedge \ldots \wedge E_{i_p}$ mit $i_1 < \ldots < i_p$ eine Basis von $\bigwedge^p V'$. Die Anzahl solcher Vektoren ist $\binom{n}{p} = \dim \bigwedge^p V'$. Mit $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$ folgt $\dim \bigwedge V' = 2^n$. **q.e.d.**

Satz 3.5. *Für $\mathbb{K}$–Vektorräume V und W und $A_1, \ldots, A_p \in \mathcal{L}(V; W)$ ist*

$$A_1' \otimes \ldots \otimes A_p' : W'^{\otimes p} \to V'^{\otimes p}, \quad B \to B \circ (A_1 \times \ldots \times A_p)$$

eine lineare Abbildung von $W'^{\otimes p}$ nach $V'^{\otimes p}$. Für $A = A_1 = \ldots = A_p$ bildet sie $S^p W'$ und auf $S^p V'$ und $\bigwedge^p W'$ auf $\bigwedge^p V'$ ab. Die entsprechende Abbildung $\bigwedge A : \bigwedge W' \to \bigwedge V'$ ist ein Algebrahomomorphismus bezüglich des äußeren Produktes.

Beweis: $A_1 \otimes \ldots \otimes A_p$ bildet $W'^{\otimes p}$ nach $V'^{\otimes p}$ ab und ist linear. Für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt

$$A'^{\otimes p+q}(B \otimes C) = A'^{\otimes p}(B) \otimes A'^{\otimes q}(C) \qquad \text{für alle } B \in W'^{\otimes p} \text{ und } C \in W'^{\otimes q}.$$

Außerdem ist die Abbildung $A'^{\otimes p}$ verträglich mit der Wirkung der Permutationsgruppe:

$$A'^{\otimes p}(\sigma.B) = \sigma.(A'^{\otimes p}(B)) \text{ für alle } B \in W'^{\otimes p} \text{ und } \sigma \in S_p.$$

Daraus folgt, dass $A'^{\otimes p}$ sowohl $S^p W'$ auf $S^p V'$ abbildet, als auch $\bigwedge^p W'$ auf $\bigwedge^p V'$. Zuletzt folgt auch, dass $A'^{\otimes p}$ mit $\mathcal{A}^p$ vertauscht, und deshalb

$$A'^{\otimes(p+q)}(B \wedge C) = A'^{\otimes p}(B) \wedge A'^{\otimes q}(C)$$

für alle $B \in \bigwedge^p W'$ und $C \in \bigwedge^q W'$ gilt. **q.e.d.**

Für die symmetrische Algebra $SV' = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p V'$ gilt eine analoge Aussage zu Satz 3.4:

$$A_1 \cdots A_p = \sum_{\sigma \in S_p} \sigma.(A_1 \otimes \ldots \otimes A_p) \text{ für alle} A_1, \ldots, A_p \in V'.$$

Eine Basis von $S^p V'$ bilden dann $E_1^{i_1} \cdots E_n^{i_n}$ mit $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_0$ und $i_1 + \ldots + i_n = p$. Die Dimension ist gleich der Anzahl der Möglichkeiten p Elemente aus $1, \ldots, n$ mit Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. Jede Auswahl ist durch die Angabe eindeutig beschrieben, an welcher Stelle wir jeweils zu Elementen mit größeren Indizies in $\{1, \ldots, n\}$ übergehen, also zu der Anzahl $\binom{n-1+p}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}$ aus einer Menge mit $n - 1 + p$ verschiednen Elementen ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $n - 1$ Elementen auszuwählen. Diese Dimension wächst mit p an und SV' ist unendlichdimensional. Diese Algebra ist der Raum der Polynome auf V. Im Folgenden benutzen wir nur die antisymmetrische Algebra.

3.2 Tensorfelder

Auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum V definiert jedes $v \in V$ das Element $A \mapsto A(v)$ von V''. Die entsprechende Abbildung von V nach V'' ist ein isometrischer Isomorphismus. Wir definieren das Tensorprodukt $V^{\otimes p}$ als $V''^{\otimes p} = \mathcal{L}(V', \ldots, V'; \mathbb{K})$. Es enthält eine Basis von kohärenten Vektoren $v_1 \otimes \ldots \otimes v_p$ mit $v_1, \ldots, v_p \in V$. Für $A \in \mathcal{L}(V, W)$ wird dann A'' auf natürliche Weise mit A identifiziert: $A''(v)(B) = B(A(v)) = A(v)(B)$.

Wir definieren jetzt auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und alle $p, q \in \mathbb{N}_0$ ein Vektorbündel $T^q_p X$. Indem wir die zusammenhängenden Komponenten einzeln betrachten, können wir annehmen, dass X die Dimension n hat. Sei also F der Vektorraum $(\mathbb{R}^n)'^{\otimes q} \otimes (\mathbb{R}^n)^{\otimes p}$ und sei $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X durch die Definitionsbreiche von Karten $\phi_U : U \to \mathbb{R}^n$. Für $U, V \in \mathcal{U}$ und $x \in U \cap V$ sind die Abbildungen

$$T'_{\phi_U(x)}(\phi_U \circ \phi_V^{-1}) : T'_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \to T'_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n, \quad T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1}) : T_{\phi_U(x)}\mathbb{R}^n \to T_{\phi_V(x)}\mathbb{R}^n$$

Elemente von $GL(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren eine entsprechende Abbildung in $GL(F)$ durch

$$\Phi_{V,U}(x) = T'_{\phi_U(x)}(\phi_U \circ \phi_V^{-1})^{\otimes q} \otimes T_{\phi_U(x)}(\phi_V \circ \phi_U^{-1})^{\otimes p}.$$

Die rechten p Faktoren sind dabei genau die Werte der Kozykel des Tangentialbündels und die linken q Faktoren die Kozykel des Kotangentialbündles. Weil beide einzeln die Kozykelbedingung erfüllen, gilt das auch für $\Phi_{V,U}$.

Definition 3.6. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n. Dann sei $T^q_p X$ das durch die Kozykel $\Phi_{V,U}$ definierte Vektorraumbündel. Insbesondere ist $T^0_1 X = TX$ das Tangentialbündle und $T^1_0 X = T'X$ das Kotangentialbündel. Die Fasern von $T^q_p X$ bzw. $T'X$ über einem Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit $T^q_{p,x} X$ bzw. $T'_x X$.*

Schnitte der Vektorraumbündel $T^q_p X$ nennen wir Tensorfelder. Wir können die Lie-Ableitung auf solchen Tensorfeldern definieren.

Definition 3.7. *Sei $f : X \to T^q_p X$ ein differenzierbares Tensorfeld auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf X. Dann sind für kleine t $\psi_F(t, \cdot)$ und $\psi_F(-t, \cdot)$ lokal stetig differenzierbare Homöomorphismen von X. Wir definieren die Lie-Ableitung von f an der Stelle $x \in X$ als*

$$(\theta_F\, f)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \big(T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t, \cdot))\big)^{\otimes q} \otimes \big(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot))\big)^{\otimes p} f(\psi_F(t, x)).$$

Wir bemerken, dass wegen $T_x(\psi_F(t, \cdot)) : T_x X \to T_{\psi_F(t,x)} X$ die Abbildungen

$$T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot)) : \; T_{\psi_F(t,x)} X \to T_x X \quad \text{und} \quad T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t, \cdot)) : \; T'_{\psi_F(t,x)} X \to T'_x X$$

zusammen folgende Abbildung induzieren:

$$\left(T'_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(t,\cdot))\right)^{\otimes q} \otimes \left(T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t,\cdot))\right)^{\otimes p} : T^q_{p,\psi_F(t,x)}X \to T^q_{p,x}X.$$

Deshalb ist die Ableitung auf der rechten Seite als die Ableitung einer differenzierbaren Funktion von $t \in (-\epsilon, \epsilon$ in den Vektorraum $T^q_{p,x}X$ wohl definiert.

Definition 3.8. *(Verjüngung): Sei $p, q \in \mathbb{N}$. Dann induzieren für jedes $i = 1, \ldots, p$ und jedes $j = 1, \ldots, q$ die Abbildungen*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : T'_x X \otimes T_x X \to \mathbb{R}, \quad u \otimes v \mapsto \langle u, v \rangle$$

einen Verjüngungsmorphismus i^j_i von dem Vektorraumbündel $T^q_p X$ auf das Vektorraumbündel $T^{q-1}_{p-1}X$. Hierbei bezeichnet $\langle u, v \rangle$ die Auswertung der Elemente von $T'_x X$ auf den Elementen von $T_x X$. Wenn $f_1, \ldots, f_p$ Vektorfelder sind, und $g_1, \ldots, g_q$ Schnitte von dem Kotangentialbündel, dann wirkt i^j_i auf $g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$ wie

$$i^j_i(g_1 \otimes \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \otimes f_p) = \langle g_j, f_i \rangle g_1 \otimes \ldots \hat{g}_j \ldots \otimes g_q \otimes f_1 \otimes \ldots \hat{f}_i \ldots \otimes f_p.$$

Hierbei ist $\langle g_j, f_i \rangle$ die Funktion $x \mapsto \langle g_j(x), f_i(x) \rangle$ auf X und $\hat{}$ beduetet, dass der entsprechende Faktor in dem Tensorprodukt weggelassen wird.

Satz 3.9. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) Seien $i < j$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, p\}$ und $k < l$ zwei verschiedene Indizes in $\{1, \ldots, q\}$. Dann vertauschen die folgenden Verjüngungsmorphismen:

$$\begin{array}{ccc} T^q_p X & \xrightarrow{i^k_i} & T^{q-1}_{p-1}X \\ i^l_j \downarrow & & \downarrow i^{l-1}_{j-1} \\ T^{q-1}_{p-1}X & \xrightarrow{i^k_i} & T^{q-2}_{p-2}X \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} T^q_p X & \xrightarrow{i^l_i} & T^{q-1}_{p-1}X \\ i^k_j \downarrow & & \downarrow i^k_{j-1} \\ T^{q-1}_{p-1}X & \xrightarrow{i^{l-1}_i} & T^{q-2}_{p-2}X \end{array}.$$

(ii) Die Lie-Ableitung θ_F vertauscht mit allen Verjüngungsmorphismen i^j_i mit $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, q$. D.h. für alle differenzierbaren Schnitte f von $T^q_p X$ und alle stetig differenzierbaren Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ gilt

$$\theta_F(i^j_i(f)) = i^j_i(\theta_F(f)).$$

(iii) Sei f ein Schnitt von $T^q_p X$ und g ein Schnitt von $T^s_r X$. Dann gilt

$$\theta_F(f \otimes g) = \theta_F(f) \otimes g + f \otimes \theta_F(g).$$

Beweis: (i) Seien $F_1, \ldots, F_p$ Vektorfelder von X und $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ Schnitte des Kotangentialbündels $T'X$ von X. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} i_{j-1}^{l-1} \circ i_i^k(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ &= \langle \alpha_l, F_j \rangle \langle \alpha_k, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ &= i_i^k \circ i_j^l(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p). \end{aligned}$$

Hierbei sind $\langle \alpha_k, F_i \rangle : x \mapsto \langle \alpha_k(x), F_i(x) \rangle$ und $\langle \alpha_l, F_j \rangle : x \mapsto \langle \alpha_l(x), F_j(x) \rangle$ Funktionen, und $\hat{\cdot}$ bedeutet, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Genauso gilt auch

$$\begin{aligned} i_{j-1}^{k} \circ i_i^l(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p) = \\ &= \langle \alpha_k, F_j \rangle \langle \alpha_l, F_i \rangle \alpha_1 \otimes \ldots \hat{\alpha}_k \ldots \hat{\alpha}_l \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \hat{F}_i \ldots \hat{F}_j \ldots \otimes F_p \\ &= i_i^{l-1} \circ i_j^k(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_q \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_p). \end{aligned}$$

(ii) Sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y. Dann sei $T_p^q(\Phi) : T_p^q Y \to T_p^q X$ folgende faser weise lineare Abbildung

$$(T'_{\Phi(x)}(\Phi)^{\otimes q} \otimes T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1})^{\otimes p} : T^q_{p,\Phi(x)} Y \to T^q_{p,x} X \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dabei sind die einzelnen Abbildungen wegen $T_x(\Phi) : T_x X \to T_{\Phi(x)} Y$ von der Form

$$T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}) : \qquad T_{\Phi(x)} Y \to T_x X \qquad \text{und} \qquad T'_{\Phi(x)}(\Phi) : \qquad T'_{\Phi(x)} Y \to T'_x X.$$

Dann kommutiert folgendes Diagramm, weil für $u \in T'_{\Phi(x)} Y$ und $v \in T_\Phi(x) Y$ auch $\langle T'_{\Phi(x)}(\Phi) u, T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}) v \rangle = \langle u, T_x(\Phi) \circ T_{\Phi(x)}(\Phi^{-1}) v \rangle = \langle u, v \rangle$ gilt:

$$\begin{array}{ccc} T_p^q Y & \xrightarrow{T_p^q(\Phi)} & T_p^q X \\ i_i^j \downarrow & & \downarrow i_i^j \\ T_{p-1}^{q-1} Y & \xrightarrow{T_{p-1}^{q-1}(\Phi)} & T_{p-1}^{q-1} X \end{array}$$

Also ist für jeden Schnitt f von dem Vektorraumbündel $T_p^q(Y)$ die Abbildung $T_p^q(\Phi) \circ f \circ \Phi$ ein Schnitt von dem Vektorraumbündel $T_p^q(X)$ ist und es gilt

$$T_{p-1}^{q-1}(\Phi) \circ i_i^j \circ f \circ \Phi = i_i^j \circ T_p^q(\Phi) \circ f \circ \Phi.$$

Für die lokalen stetig differenzierbaren Homöomorphismen $\psi_F(t, \cdot)$ gilt also auch

$$T_{p-1}^{q-1}(\psi_F(t, \cdot)) \circ i_i^j \circ f \circ \psi_F(t, \cdot) = i_i^j \circ T_p^q(\psi_F(t, \cdot)) \circ f \circ \psi_F(t, \cdot).$$

Indem wir die linke und die rechte Seite nach t differenzieren erhalten wir $\theta_F(i^j_i(f)) =$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T^{q-1}_{p-1}(\psi_F(t,\cdot))\circ i^j_i\circ f\circ\psi_F(t,\cdot) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} i^j_i\circ T^q_p(\psi_F(t,\cdot))\circ f\circ\psi_F(t,\cdot) = i^j_i(\theta_F(f)).$$

(iii) folgt für $t\to 0$ aus $\frac{f_t\otimes g_t - f\otimes g}{t} = \frac{f_t - f}{t}\otimes g_t + f\otimes\frac{g_t-g}{t}$ mit $f_t = (T'(\psi_F(t,\cdot)))^{\otimes q}\otimes(T(\psi_F(-t,\cdot)))^{\otimes p} f\circ\psi_F(t,\cdot)$ und $g_t = (T'(\psi_F(t,\cdot)))^{\otimes s}\otimes(T(\psi_F(-t,\cdot)))^{\otimes r} g\circ\psi_F(t,\cdot)$.**q.e.d.**

Aus (ii) und (iii) folgt für alle $E,F\in\mathrm{Vec}^1(X)$ und alle Schnitte α von $T'X$

$$\langle\theta_F\,\alpha,E\rangle = \theta_F(\langle\alpha,E\rangle) - \langle\alpha,[F,E]\rangle \quad\text{wegen}\quad \theta_F(\langle\alpha,E\rangle) = \langle\theta_F\,\alpha,E\rangle + \langle\alpha,\theta_F\,E\rangle.$$

Mithilfe von (iii) lassen sich dann die Lie-Ableitungen von beliebigen Tensorprodukten von Vektorfeldern und Schnitten des Kotangentialbündels berechnen.

3.3 Differentialformen

Definition 3.10. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für alle $p\in\mathbb{N}$ sei dann $\bigwedge^p X$ das antisymmetrische Untervektorraumbündel von T^pX. Analog sei $\bigwedge X$ die direkte Summe aller Vektorraumbündel $\bigwedge^p X$. Die Schnitte von $\bigwedge^p X$ heißen p–Differentialformen oder nur Differentialformen.*

Das p–fache antisymmetrische Tensorprodukt $\bigwedge^p V'$ des Dualraumes V' eines endlichdimensionalen Vektorraumes V ist ein Unterraum des p–fachen Tensorproduktes $V'^{\otimes p}$ von V' mit sich selber. Deshalb sind die Elemente von $\bigwedge^p V'$ antisymmetrische p–lineare Abbildungen von V^p nach $\mathbb{K}$. Wenn $\alpha\in\bigwedge^p V'$ ein Element dieses p–fachen antisymmetrischen Tensorproduktes ist, und $v_1,\ldots,v_p\in V$ Elemente von V sind, dann können wir α auf $(v_1,\ldots,v_p)\in V^p$ auswerten. Diese Auswertung ist antisymmetrisch in $v_1,\ldots,v_p$. Wir wollen sie folgendermaßen bezeichnen:

$$\langle\alpha, v_1\otimes\ldots\otimes v_p\rangle.$$

Das heißt insbesondere für Elemente $A_1,\ldots,A_p\in V'$ und Elemente $v_1,\ldots,v_p\in V$:

$$\langle A_1\wedge\ldots\wedge A_p, v_1\otimes\ldots\otimes v_p\rangle = \sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\langle A_{\sigma(1)},v_1\rangle\cdots\langle A_{\sigma(p)},v_p\rangle = \det\big(\langle A_i,v_j\rangle\big).$$

Auf Differentialformen angewendet heißt das, dass für jede r mal stetig differenzierbare p–Differentialform α und Vektorfelder $F_1,\ldots,F_p\in\mathrm{Vec}^r(X)$, die Auswertung der Differentialform α auf dem Schnitt $F_1\otimes\ldots\otimes F_p$ des Vektorraumbündels T^0_pX eine r mal stetig differenzierbare reelle Funktion in $C^r(X,\mathbb{R})$ ergibt:

$$\langle\alpha, F_1\otimes\ldots\otimes F_p\rangle\in C^r(X,\mathbb{R}).$$

Definition 3.11. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}(X)$ ein Vektorfeld von X. Für alle $p \in \mathbb{N}$ sei i_F der eindeutig bestimmte Morphismus $i_F : \bigwedge^p X \to \bigwedge^{p-1} X$, der auf p–Differentialformen α wirkt für alle $F_1, \ldots, F_{p-1} \in \mathrm{Vec}(X)$ wie*

$$\langle i_F \circ \alpha, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle = \langle \alpha, F \otimes F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle.$$

Wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, dann ist $\bigwedge^p X$ ein Vektorraumbündel der Dimension $\binom{n}{p}$. Für $p > n$ ist also $\bigwedge^p X$ Null-dimensional und $\bigwedge X$ ist ein Vektorraumbündel der Dimension 2^n. Der Grund, dass wir gerade die antisymmetrischen Untervektorraumbündel von den Tensorprodukten des Kotangentialbündels und nicht von dem Tangentialbündel betrachten, ist dass die entsprechenden Schnitte, also die Differentialformen, das richtige Transformationsverhalten haben, um sie zu integrieren. Diese Differentialformen werden sich als sehr natürliche Objekte herausstellen. Eine schöne Eigenschaft können wir sofort ablesen: Sie lassen sich unter einer differenzierbaren Abbildung zurückziehen, während sich Vektorfelder nur unter invertierbaren differenzierbaren Abbildungen transformieren lassen.

Satz 3.12. *Seien X und Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten und f eine stetig differenzierbare Abbildung von X nach Y. Dann gilt*

(i) Das faserweise äußere Produkt $\wedge : \bigwedge^p X \times_X \bigwedge^q X \to \bigwedge^{p+q} X$ macht die Differentialformen von X zu einer assoziativen Algebra mit dem äußeren Produkt

$$\wedge : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β mit $p, q \in \mathbb{N}_0$. Hierbei ist $\bigwedge^0 X$ das triviale reelle Linienbündel $\mathbb{R} \times X$ über X. Die 0–Differentialformen sind reelle Funktionen und die Multiplikation einer reellen Funktion f mit einer p–Differentialformen α schreiben wir als $(f, \alpha) \to f\alpha$.

(ii) Für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

(iii) Für alle $x \in X$ bilden die Abbildungen

$$\bigwedge^p (T'_{f(x)}(f)) : \quad \bigwedge^p_{f(x)} Y \to \bigwedge^p_x X \text{ wegen } \quad T'_{f(x)}(f) : \quad T'_{f(x)} Y \to T'_x X$$

einen Algebrahomomorphismus von $\bigwedge_{f(x)} Y$ nach $\bigwedge_x X$. Jede p–Differentialform α auf Y definiert also mittels f folgende p–Differentialform $f^*\alpha$ auf X:

$$(f^*\alpha)(x) = \bigwedge^p_{f(x)} (T'_{f(x)}(f))(\alpha(f(x))).$$

(iv) *f^* ist ein Algebrahomomorphismus von den Differentialformen auf Y auf die Differentialformen auf X, d.h. für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β von Y gilt*

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

(v) *Für $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ wirkt die Lie-Ableitung θ_F auf den Differentialformen wie*

$$\theta_F\, \alpha = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_F^*(t, \cdot)\alpha.$$

Sie ist eine Derivation, d.h. für alle p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt

$$\theta_F(\alpha \wedge \beta) = \theta_F(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_F(\beta).$$

(vi) *Für $F \in \mathrm{Vec}(X)$ induziert $i_F : \bigwedge X \to \bigwedge X$ eine Antiderivation auf den Differentialformen, d.h. für alle p–Differentialformen α und alle q–Differentialformen β gilt*

$$i_F(\alpha \wedge \beta) = i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta).$$

Außerdem gilt $\quad i_F \circ i_F = 0.$

(vii) *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt* $\quad \theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E = i_{[E,F]}.$

Beweis: (i)–(iv) folgen aus den Sätzen 3.4–3.5 über antisymmetrische Tensorprodukte im ersten Abschnitt. Wegen Satz 3.9 (iii) gilt für 1–Differentialformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$

$$\theta_F(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \theta_F\, \alpha_{\sigma(i)} \cdots \otimes \alpha_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_1 \wedge \cdots \theta_F\, \alpha_i \cdots \wedge \alpha_p.$$

Daraus folgt (v). Zum Beweis von (vi) betrachten wir 1–Differentialformen $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ und Vektorfelder $F_1, \ldots, F_{p-1}$. Dann gilt $\quad \langle i_F(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p), F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sgn}(\sigma) \langle \alpha_{\sigma(1)}, F \rangle \cdot \langle \alpha_{\sigma(2)}, F_1 \rangle \cdots \langle \alpha_{\sigma(p)}, F_{p-1} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_i, F \rangle \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \langle \alpha_1 \wedge \ldots \wedge i_F(\alpha_i) \wedge \ldots \wedge \alpha_p, F_1 \otimes \ldots \otimes F_{p-1} \rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir jede Permutation $\sigma \in S_p$ zerlegt in die Verkettung $\tau \circ \sigma_i$ einer der Permutationen $\sigma_i : (1, \ldots, p) \mapsto (i, 1, \ldots, \hat{i}, \ldots, p)$ und einer Permutation $\tau \in S_{p-1}$ der

Elemente $\{2,\dots,p\}$. Diese Zerlegung ist eine bijektive Abbildung $S_p \simeq (S_{p-1})^p$. Die erste Permutation σ_i hat als ein Produkt von $(i-1)$ Transpositionen $\mathrm{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{i-1}$. Wegen der letzten Gleichung ist i_F eine Antiderivation. Weil die Auswertung von p–Differentialformen antisymmetrisch in den Vektorfeldern ist, folgt $i_F \circ i_F = 0$.

Zum Beweis von (vii) zeigen wir mit (v) und (vi) zunächst, dass $\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E$ eine Antiderivation ist. Für eine p–Differentialform α und eine q–Differentialform β gilt

$$\begin{aligned}
&(\theta_E \circ i_F - i_F \circ \theta_E)(\alpha \wedge \beta) = \\
&\quad = \theta_E(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \theta_E(\beta)) \\
&\quad = \theta_E(i_F(\alpha)) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \theta_E(i_F(\beta)) - i_F(\theta_E(\alpha)) \wedge \beta - (-1)^p \alpha \wedge i_F(\theta_E(\beta)).
\end{aligned}$$

Dann genügt es (vii) für differenzierbare 1–Differentialform α zu zeigen. Sei also $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt wegen der Schlussfolgerung nach Satz 3.9

$$\theta_E(i_F(\alpha)) - i_F(\theta_E(\alpha)) = \theta_E \langle \alpha, F\rangle - \langle \theta_E\, \alpha, F\rangle = \langle \alpha, \theta_E\, F\rangle = i_{[E,F]}\alpha. \qquad \mathbf{q.e.d.}$$

Die Lie–Ableitung θ_F stimmt wegen Lemma 2.20 auf den 0–Differentialformen mit der vorher definierten Derivation θ_F auf den Funktionen überein.

3.4 Die äußere Ableitung

Definition 3.13. *Für jeden Punkt $x \in X$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und jede differenzierbare reelle Funktion f auf X definiert die lineare Abbildung*

$$df(x) : T_x X \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto D_v(f)$$

aus Satz 1.40 ein Element von $T'_x X$. Dadurch wird für jede differenzierbare Funktion f auf X der Gradient df von f zu einem globalen Schnitt von $T'X$:

$$df : X \to T'X \quad \text{mit} \quad \langle df, F\rangle = \theta_F(f) \quad \text{für alle } F \in \mathrm{Vec}(X).$$

Wir wollen $d : f \mapsto df$ zu einer Abbildung auf allen Differentialformen fortsetzen.

Satz 3.14. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ einen eindeutigen Differentialoperator d von den differenzierbaren p–Differentialformen in die $(p+1)$–Differentialformen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Für alle differenzierbaren p–Differentialformen α und q–Differentialformen β gilt

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta.$$

(ii) Auf differenzierbaren Funktionen f (also $p = 0$) wirkt d wie $f \mapsto df$ (siehe oben).

(iii) Für jede zweimal differenzierbare Funktionen f gilt $d(df) = 0$.

Beweis: Wir werden gleich sehen, dass jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von p–Differentialformen folgender Form ist:

$$\alpha = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p.$$

Die Bedingungen (i)-(iii) erzwingen, dass auf solchen p–Differentialformen d wirkt wie

$$d\alpha = df \wedge dg_1 \wedge \ldots dg_p.$$

Also ist der Differentialoperator d durch die Bedingungen (i)-(iii) eindeutig bestimmt.

Um obige Aussage und die Existenz zu beweisen, wählen wir eine Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um einen beliebigen Punkt $x \in U \subset X$. Die Komponenten $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sind glatte Funktionen auf U, deren 1-Formen $d\phi_1(x), \ldots, d\phi_n(x)$ bei allen $x \in U$ eine Basis des Kotangentialraums bilden. Also ist jede p–Differentialform eine endliche Linearkombination von Differentialformen der Form

$$f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \text{ mit } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n.$$

Für eine differenzierbaren Funktion f ist df auf U folgende Linearkombination:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i}(\phi(x)) \cdot d\phi_i(x)$$

von $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ (vergleiche Satz 1.40). Dann folgt

$$d(f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \; d\phi_i \wedge d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p}.$$

Also ist d auf allen p–Differentialformen definiert. Wir müssen noch zeigen, dass (i) und (iii) gelten. Wir zeigen zunächst (iii). Aufgrund der Konstruktion von d gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot d\phi_j \wedge d\phi_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j \partial \phi_i} \circ \phi \cdot (d\phi_j \wedge d\phi_i + d\phi_i \wedge d\phi_j) = 0 \end{aligned}$$

Hier haben wir mit dem Schwarz'sche Lemma die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht. Wegen der Linearität genügt es (i) für Differentialformen

$$\alpha = f d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_p} \quad \text{und} \quad \beta = g d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_q}$$

zu zeigen. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
\alpha\wedge\beta &= fgd\phi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{i_p}\wedge d\phi_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{j_q}\\
d(\alpha\wedge\beta) &= (fdg+gdf)d\phi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{i_p}\wedge d\phi_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{j_q}\\
&= (df\wedge d\phi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{i_p})\wedge(gd\phi_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{j_q})\\
&\quad+(-1)^p(fd\phi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{i_p})\wedge(dg\wedge d\phi_{j_1}\wedge\ldots\wedge d\phi_{j_q})\\
&= d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 3.15. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(i) *Für jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt $d(d\alpha)=0$.*

(ii) *Für jede zweimal differenzierbare Abbildung $f: X\to Y$ zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y und jede differenzierbare p–Differentialform α auf Y ist $f^*\alpha$ eine differenzierbare p–Differentialform auf X und es gilt*

$$d(f^*\alpha)=f^*(d\alpha).$$

(iii) *Für jedes $F\in\mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare Funktion g gilt*

$$\theta_F(dg)=d(\theta_F(g))$$

(iv) *Für jedes $F\in\mathrm{Vec}^1(X)$ und jede zweimal differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\,d\alpha=d(\theta_F\,\alpha)$$

(v) *Für jedes $F\in\mathrm{Vec}^1(X)$ und jede differenzierbare p–Differentialform α gilt*

$$\theta_F\,\alpha=(i_F\circ d+d\circ i_F)(\alpha).$$

(vi) *Für jede differenzierbare p–Differentialform α und $F_0,\ldots,F_p\in\mathrm{Vec}^1(X)$ gilt*

$$\begin{aligned}
\langle d\alpha,F_0\otimes\ldots\otimes F_p\rangle &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,\theta_{F_i}(\langle\alpha,F_0\otimes\ldots\hat{F}_i\ldots\otimes F_p\rangle)\\
&\quad+\sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j}\langle\alpha,[F_i,F_j]\otimes F_0\otimes\ldots\hat{F}_i\ldots\hat{F}_j\ldots\otimes F_p\rangle.
\end{aligned}$$

Beweis: (i) Sei α wie im Beweis von (i) des vorangehenden Satzes $\alpha = f dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p$. Dann gilt wegen (i) und (iii) aus dem vorangehenden Satz

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= d(df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p) \\ &= d(df) \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p + \sum_{j=1}^{p} (-1)^j df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge d(dg_j) \wedge \ldots \wedge dg_p = 0. \end{aligned}$$

(ii) Wegen der Kettenregel gilt für alle differenzierbaren Funktionen g auf Y bei $x \in X$

$$(d(f^*g))(x) = (d(g \circ f))(x) = dg(f(x)) \circ T_x(f) = T'_{f(x)}(f) \circ dg(f(x)) = (f^*dg)(x).$$

Dann folgt (ii) aus (i), der Linearität von d, der Konstruktion von d im Beweis des vorangehenden Satzes und aus Satz 3.12 (iv): Sei $\alpha = g dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha) &= d\big(f^*g(f^*dg_1) \wedge \ldots \wedge (f^*dg_p)\big) && = d\big((f^*g) d(f^*g_1) \wedge \ldots \wedge d(f^*g_p)\big) \\ &= (f^*dg) \wedge (f^*dg_1) \wedge \ldots \wedge (f^*dg_p) && = f^*d(g dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p) = f^*(d\alpha). \end{aligned}$$

(iii) Aus $\langle dg, E\rangle = \theta_E(g)$ und der Schlussfolgerung nach Satz 3.9 folgt für $E \in \mathrm{Vec}^1(X)$

$$\begin{aligned} \langle \theta_F(dg) - d(\theta_F(g)), E\rangle &= \langle \theta_F(dg), E\rangle & & - \langle d(\theta_F(g)), E\rangle \\ &= \theta_F(\langle dg, E\rangle) & - \langle dg, [F,E]\rangle & - \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= \theta_F(\theta_E(g)) & - \theta_{[F,E]}(g) & - \theta_E(\theta_F(g)) \\ &= [\theta_F, \theta_E](g) & - \theta_{[F,E]}(g) & = 0. \end{aligned}$$

(iv) Wegen Satz 3.15 (i) ist d eine Antiderivation. Also ist $\theta_F \circ d - d \circ \theta_F$ genauso wie im Beweis von Satz 3.12 (vii) eine Antiderivation. Dann genügt es (iv) für Funktionen $\alpha = g$ und 1–Differentialformen $\alpha = dg$ und zu zeigen. Beides folgt aus (iii):

$$\theta_F(d \circ dg) = 0 = d \circ d\, \theta_F(g) = d\, \theta_F(dg).$$

(v) Wegen Satz 3.15 (i) und Satz 3.12 (vi) sind sowohl d als auch i_F Antiderivationen. Dann ist $i_F \circ d + d \circ i_F$ eine Derivation: Für eine p–Differentialform α und eine q–Differentialform β gilt nämlich $(i_F \circ d + d \circ i_F)(\alpha \wedge \beta) =$

$$\begin{aligned} &= i_F(d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta) + d(i_F(\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i_F(\beta)) \\ &= i_F(d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge i_F(d\beta) + d(i_F(\alpha)) \wedge \beta + \alpha \wedge d(i_F(\beta)). \end{aligned}$$

Also genügt es (v) für Funktionen $\alpha = g$ und 1–Differentialformen $\alpha = dg$ zu zeigen. Für Funktionen $\alpha = g$ ist $i_F\alpha = 0$ und (v) folgt aus $\theta_F(g) = i_F(dg) = \langle dg, F\rangle$. Für $\alpha = dg$ ist $d\alpha = 0$ und $\theta_F(dg) = d\,\theta_F(g) = d\langle dg, F\rangle = d i_F \alpha$ folgt aus (iii).

Wegen (v) gilt induktiv in p

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_0}d &= i_{F_p}\cdots i_{F_1}\,\theta_{F_0} - i_{F_p}\cdots i_{F_1}di_{F_0} \\ &= (-1)^{p+1}di_{F_p}\cdots i_{F_0} + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i i_{F_p}\cdots i_{F_{i+1}}\,\theta_{F_i}\,i_{F_{i-1}}\cdots i_{F_0}. \end{aligned}$$

Auf p–Differentialformen α verschwindet der erste Summand auf der rechten Seite. Wegen Satz 3.12 (vii) gilt $i_{F_j}\,\theta_{F_i} = \theta_{F_i}\,i_{F_j} + i_{[F_j,F_i]}$. Die Summanden sind dann

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_{i+1}}\,\theta_{F_i}\,i_{F_{i-1}}\cdots i_{F_0} &= \theta_{F_i}\,i_{F_p}\cdots \widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0} \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{p} i_{F_p}\cdots i_{F_{j+1}}i_{[F_j,F_i]}i_{F_{j-1}}\cdots\widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0}. \end{aligned}$$

Wegen der Antisymmetrie gilt $i_{F_i}i_{F_j} = -i_{F_j}i_{F_i}$. Dann folgt insgesamt (vi):

$$\begin{aligned} i_{F_p}\cdots i_{F_0}d &= (-1)^{p+1}di_{F_p}\cdots i_{F_0} + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\,\theta_{F_i}\,i_{F_p}\cdots\widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0} \\ &\quad + \sum_{0\le i<j\le p}(-1)^{i+j}i_{F_p}\cdots\widehat{i_{F_j}}\cdots\widehat{i_{F_i}}\cdots i_{F_0}i_{[F_i,F_j]}. \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Für jede differenzierbare 1–Differentialform ω und $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ wird (vi) zu

$$\langle d\omega, E\otimes F\rangle = \theta_E\langle\omega, F\rangle - \theta_F\langle\omega, E\rangle - \langle\omega, [E,F]\rangle.$$

Die Formel (vi) drückt die äußeren Ableitung einer Differentialform durch Lie–Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern aus. Umgekehrt drückt die Formel (v) die Lie–Ableitung einer Differentialform durch die äußere Ableitung aus.

3.5 Orientierungen

Für die Integration von Differentialformen müssen wir noch den Begriff der Orientierung einführen. Weil die Übergangsfunktionen zwischen zwei verträglichen Karten einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Diffeomorphismen zwischen offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ sind, liegen ihre Ableitungen in $GL(\mathbb{R}^n)$. Sie werden also durch reelle $n\times n$ Matrizen beschrieben, deren reelle Determinante ungleich Null ist.

Definition 3.16. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt ein Atlas von X orientiert, wenn die Ableitungen der Übergangsfunktionen, zwischen zwei Karten mit nicht schnittfremdem Definitionsbereich jeweils positive Determinante haben.*

Wenn X einen solchen orientierten Atlas besitzt, dann heißt X orientierbar. Andernfalls heißt X nicht orientierbar. Eine Orientierung von X ist eine Äquivalenzklasse von orientierten Atlanten, wobei zwei orientierte Atlanten äquivalent sind, wenn die Vereinigung der beiden orientierten Atlanten wieder ein orientierter Atlas ist.

Die invertierbare lineare Abbildung

$$I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto I(x) \quad \text{mit} \quad I(x) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

hat offenbar Determinante -1 und ist eine Involution, d.h. ihr Quadrat ist $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. Für jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist die Verkettung $I \circ \phi$ mit I auch eine Karte von X. Wenn also von zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U \cap V \neq \emptyset$ die Ableitung der Übergangsfunktionen $(\psi \circ \phi^{-1})'$ auf einer Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ negative Determinante hat, dann hat die Ableitung der Übergangsfunktion $((I \circ \psi) \circ \phi^{-1})'$ bzw. $(\phi \circ (I \circ \psi)^{-1})'$ positive Determinante auf der entsprechenden Zusammenhangskomponente von $\phi[U \cap V]$ bzw. $I \circ \phi[U \cap V]$. Also können wir versuchen einen Atlas von X dadurch zu einem orientierten Atlas zu machen, dass wir einige Karten des Atlases durch die Verkettung mit I ersetzen. Wenn X orientierbar ist, dann ist das möglich.

Satz 3.17. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann ist folgendes äquivalent*

(i) X ist orientierbar.

(ii) Jede zusammenhängende Komponente von X ist orientierbar.

(iii) Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X ist $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ trivial.

(iv) Auf jeder zusammenhängenden Komponente Y von X gibt es eine stetige $\dim(Y)$–Differentialform, die keine Nullstellen auf Y hat.

Beweis:(i) $\Longleftrightarrow$(ii): Offenbar sind (ii) und (i) äquivalent.
(ii)$\Rightarrow$(iv): Sei Y eine orientierbare zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ ist $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ eine n–Differentialform, die offenbar keine Nullstellen hat, weil $d\phi_1, \ldots, d\phi_n$ alle linear unabhängig sind. Für eine zweite Karte $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eines orientierten Atlases von Y ist $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n = \det(\psi \circ \phi^{-1})' \circ \phi d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$, weil für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$d\psi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi_i \circ \phi^{-1})}{\partial \phi_j} \circ \phi \cdot d\phi_j.$$

Also sind auf $U \cap V$ die beiden n–Differentialformen $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$ durch eine positive glatte Funktion proportional zueinander. Die Überdeckung

durch die Definitionsbereiche der Karten des orientierten Atlases von Y besitzt eine entsprechende Zerlegung der Eins $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Die Summe über die Produkte von h_m mit den $d\phi_1\wedge\ldots\wedge d\phi_n$, außhalb deren Definitionsbreichen h_m verschwinden, ist eine globale glatte $\dim(Y)$–Differentialform auf Y ohne Nullstellen.
(iii) $\Longleftrightarrow$(iv): Weil $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ ein reelles Linienbündel ist, folgt aus Lemma 1.58, dass $\bigwedge^{\dim(Y)} Y$ genau dann trivial ist, wenn es einen globalen glatten Schnitt ohne Nullstellen besitzt. Also sind (iii) und (iv) äquivalent.
(iv)$\Rightarrow$(ii): Sei ω eine stetige $\dim(Y)$–Differentialform auf der zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y ohne Nullstellen. Auf dem Definitionsbereich U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eines Atlases von Y gilt dann $\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ mit einer stetigen Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, die keine Nullstellen hat. Die Urbilder $f^{-1}[(-\infty,0)] = f^{-1}[(-\infty,0]]$ und $f^{-1}[(0,\infty)] = f^{-1}[[0,\infty)]$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen. Deshalb ist f auf jeder Zusammenhangskomponente von U entweder positiv oder negativ. Das Vorzeichen von $d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ dreht sich um, wenn wir ϕ durch $I\circ\phi$ ersetzen. Indem wir auf denjenigen Zusammenhangskomponenten von Definitionsbereichen von Karten des Atlases die Karte mit I verknüpfen, auf denen das entsprechende f negativ (bzw. positiv) ist, erhalten wir einen Atlas von Y, so dass für alle Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, die entsprechenden Funktionen f mit $\omega = f d\phi_1\wedge\ldots\wedge d\phi_n$ positiv (bzw. negativ) sind. Für zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $U\cap V \neq \emptyset$ dieses Atlases gilt mit entsprechenden positiven Funktionen f und g auf $U\cap V$

$$\omega = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n = g d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n.$$

Aus $\omega/g = d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n = \det(\psi\circ\phi^{-1})'\circ\phi\cdot d\psi_1\wedge\ldots\wedge d\phi_n$ folgt $\det(\psi\circ\phi^{-1})'\circ\phi = f/g > 0$ auf $U\cap V$. Also ist der neue Atlas von Y orientiert. Daraus folgt (ii). **q.e.d.**

An diesem Beweis erkennen wir auch, dass jede orientierbare zusammenhängende Mannigfaltigkeit X genau zwei Orientierungen besitzt. Die zweite erhalten wir aus der ersten, indem wir alleKarten mit I verknüpfen. Allgemein besitzt jede orientierbare Mannigfaltigkeit mit N zusammenhängenden Komponenten genau 2^N Orientierungen.

Beispiel 3.18. *Satz 3.31 und Beispiel 4.10 werden zeigen, dass im $\mathbb{R}^{n+1}$ jede n-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit orientierbar ist. Hier zeigen wir, dass folgende n–Differentialform auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat:*

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Weil x^2 auf der Untermannigfaltigkeit $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ konstant ist, gilt dort

$$\sum_{i=0}^{n} x_i dx_i = 0.$$

Für jedes $k = 0, \dots, n$ gilt auf der offenen Teilmenge $U_k = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_k \neq 0\}$ von $\mathbb{S}^n$

$$dx_k = -\sum_{i \neq k} \frac{x_i}{x_k} dx_i.$$

Für $i \neq k$ können wir dx_k in $(-1)^i x_i dx_0 \wedge \dots \widehat{dx_i} \dots \wedge dx_n$ durch $-\frac{x_i}{x_k} dx_i$ ersetzen. Durch eine geeignete Permutation mit der Signatur $-(-1)^{k-i}$ erhalten wir

$$(-1)^i x_i dx_0 \wedge \dots \widehat{dx_i} \dots \wedge dx_n = (-1)^k \frac{x_i^2}{x_k} dx_0 \wedge \dots \widehat{dx_k} \dots \wedge dx_n.$$

Weil dies offenbar auch für $i = k$ gilt und wegen $x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$ folgt auf U_k

$$\omega = (-1)^k \frac{1}{x_k} dx_0 \wedge \dots \widehat{dx_k} \dots \wedge dx_n = (-1)^k \frac{1}{x_k} p_k^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

mit $p_k : U_k \to \mathbb{R}^n$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots \widehat{x_k} \dots, x_n)$. Wegen $x_k = \pm\sqrt{1 - p_k^2(x)}$ ist p_k ein lokaler Diffeomorphismus, also eine Immersion. Weil $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ auf $\mathbb{R}^n$ keine Nullstellen hat, hat ω_n auf $\mathbb{S}^n = U_1 \cup \dots \cup U_n$ keine Nullstellen und $\mathbb{S}^n$ ist orientierbar.

3.6 Integration von Differentialformen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass auf einer orientierbaren n–dimensionalen Mannigfaltigkeit X jede stetige n–Differentialform ω über alle kompakten Teilmengen A von X integriert werden kann. Dafür geben wir an, wie wir dieses Integral lokal in einer Karte berechnen. Wir zeigen dann, dass dieses Integral nicht von der Wahl der Karte abhängt. Mit Hilfe einer geeigneten Zerlegung der Eins können wir zuletzt das Integral von ω über eine beliebige kompakte Teilmenge $A \subset X$ definieren.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir stellen uns vor, dass A der Abschluss einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Jede stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist dann beschränkt. Indem wir f außerhalb von A gleich Null setzen, erhalten wir eine Lebesque–integrable Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Wenn der Rand ∂A von A, also die Schnittmenge von A mit dem Abschluss des Komplements von A, eine Nullmenge ist, dann ist nach dem Lebesgue–Kriterium die Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}^n$ sogar Riemann–integrabel. Wenn wir uns im folgenden also auf solche kompakte Teilmengen A von X beschränkten, deren Ränder ∂A in allen Karten Nullmengen sind, dann können wir auch das Riemannintegral statt dem Lebesgueintegral benutzen. Im folgenden Satz rufen wir in Erinnerung, wie sich das Integral unter Koordinatentransformationen verhält.

Satz 3.19. *(Jacobis Transformationsformel) Sei $\Phi : U \to V$ ein C^1–Diffeomorphismus von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_U f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \ldots dx_n = \int_V f(y)dy_1 \ldots dy_n \quad \text{für alle} \quad f \in L^1(V).$$

Insbesondere gilt für eine kompakte Menge $A \subset U$ und ein $f \in C(\Phi[A], \mathbb{R}) \subset L^1(V)$

$$\int_A f(\Phi(x))|\det(\Phi'(x))|dx_1 \ldots dx_n = \int_{\Phi[A]} f(y)dy_1 \ldots dy_n.$$

Korollar 3.20. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine stetige n–Differentialform auf X. Sei A eine kompakte Teilmenge, die in den Definitionsbereichen U und V zweier Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eines orientierten Atlases von X enthalten ist. Dann gibt es zwei stetige Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : V \to \mathbb{R}$ mit $\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$ und $\omega|_V = g d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$. Und es gilt*

$$\int_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n = \int_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n.$$

Beweis: Offenbar ist $\phi \circ \psi^{-1}|_{\psi[U\cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\psi[U \cap V]$ auf $\phi[U \cap V]$, und es gilt $\det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(f(x)))) > 0$ für alle $x \in U \cap V$. Außerdem gilt für $x \in U \cap V$

$$d\phi_1(x) \wedge \ldots \wedge d\phi_n(x) = \det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x)))d\psi_1(x) \wedge \ldots \wedge d\psi_n(x).$$
$$g(x) = f(x)\det((\phi \circ \psi^{-1})'(\psi(x))).$$

Seien jetzt $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi[U] \to \mathbb{R}$ und $\tilde{g} = g \circ \psi^{-1} : \psi[V] \to \mathbb{R}$. Dann gilt auf $\psi[U \cap V] : \tilde{f} \circ (\phi \circ \psi^{-1}) \cdot \det((\phi \circ \psi^{-1})') = \tilde{g}$. Also folgt aus Jacobis Transformationsformel

$$\begin{aligned}\int_{\phi[A]} f(\phi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n &= \int_{\phi[A]} \tilde{f}(x)dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\psi[A]} \tilde{f}(\phi \circ \psi^{-1}(x))\det((\phi \circ \psi^{-1})'(x))dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{\psi[A]} \tilde{g}(x)dx_1 \cdots dx_n = \int_{\psi[A]} g(\psi^{-1}(x))dx_1 \cdots dx_n.\end{aligned}$$ **q.e.d.**

Mit diesem Korollar können wir das Integral einer n–Differentialform auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit definieren.

Definition 3.21. *Sei X eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und ω eine stetige n–Differentialform auf X und $A \subset X$ kompakt. Die Überdeckung der kompakten Menge A durch die Definitionsbereiche eines orientierten Atlases von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung und eine entsprechende Zerlegung der*

Eins $(h_m)_m$. Wegen der lokalen Endlichkeit verschwinden alle bis auf endlich viele der h_m's auf der kompakten Menge A. Für jedes m verschwindet h_m außerhalb einer kompakten Teilmenge $A_m \subset U_m$ des Definitionsbereiches einer Karte $\phi_m : U_m \to \mathbb{R}^n$. Auf U_m sei ω gleich $\omega = f_m d\phi_{m,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{m,n}$ mit stetigen $f_m : U_m \to \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\int_A \omega = \sum_m \int_{\phi_m[A \cap A_m]} h_m(\phi_m^{-1}(x)) f_m(\phi_m^{-1}(x)) dx_1 \cdots dx_n.$$

Wegen dem vorangehenden Korollar hängt das Integral $\int_A \omega$ weder von der Wahl des orientierten Atlases noch von der Wahl der Zerlegung der Eins ab. Dieses Integral kann auch in Analogie zum uneigentlichen Riemannintegral auf nicht kompakte Teilmengen A von X ausgedehnt werden, wenn die entsprechenden Summen konvergieren.

Wenn wir die Orientierung von X umdrehen, dann wechselt das Integral $\int_A \omega$ das Vorzeichen, weil sich in allen Karten das Vorzeichen folgender Funktion f ändert:

$$\omega|_U = f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Zum Abschluss können wir Jacobis Transformationsformel noch mal umformulieren:

Korollar 3.22. *Sei $f : X \to Y$ eine orientierungserhaltender C^1–Diffeomorphismus zwischen den orientierten Mannigfaltigkeiten X und Y der Dimension n. Sei $A \subset X$ eine kompakte Teilmenge und ω eine stetige n–Differentialform auf Y. Dann gilt*

$$\int_{f[A]} \omega = \int_A f^* \omega.$$ **q.e.d.**

Im Allgemeinen gilt dies nicht, wenn f nur eine Immersion zwischen zwei gleichdimensionalen Mannigfaltigkeiten und damit nicht notwendigerweise injektiv ist.

Beispiel 3.23. *Betrachte z.B. die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, die von der Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ induziert wird mit $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung f ist zwar eine Immersion, und damit auch lokal ein Diffeomorphismus. Allerdings ist sie für $n > 1$ nicht injektiv. Es ist eine sogenannte Überlagerungsabbildung, d.h. die Urbilder von einzelnen Punkten bestehen jeweils aus n Punkten. Wir parametrisieren $\mathbb{S}^1$ durch $\phi \mapsto e^{\imath\phi}$. Dann ist $\omega = d\phi$ eine nichtverschwindende 1–Differentialform auf $\mathbb{S}^1$ und induziert wegen Satz 3.17 auf $\mathbb{S}^1$ eine Orientierung. Wegen $(e^{\imath\phi})^n = e^{n\imath\phi}$ entspricht die Abbildung f in dieser Parametrisierung der Abbildung $\phi \mapsto n\phi$. Also gilt $f^* d\phi = n d\phi$. Damit ist sie insbesondere orientierungserhaltend. Es gilt aber*

$$\int_{\mathbb{S}^1} f^*\omega = \int_{\mathbb{S}^1} n d\phi = n \int_{\mathbb{S}^1} d\phi = n \int_{f[\mathbb{S}^1]} \omega.$$

Zum Abschluss dieses Abschnittes zeigen wir noch den Satz vom Igel.

Satz vom Igel 3.24. *Die n–dimensionale Sphähre $\mathbb{S}^n$ hat genau dann ein nichtverschwindendes glattes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

Beweis: Wenn wir $\mathbb{S}^n$ mit $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren, dann wird in jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ der Tangentialraum $T_x\mathbb{S}^n$ mit $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot x = 0\}$ identifizert. Deshalb werden die Vektorfelder von $\mathbb{S}^n$ durch folgende Abbildungen beschrieben:

$$F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad x \cdot F(x) = 0.$$

Für ungerades n ist $x \mapsto (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{n+1}, -x_n)$ eine solche Abbildung.

Sei jetzt n gerade und F eine solche glatte Abbildung ohne Nullstellen. Dann ist

$$f_\epsilon : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n(\sqrt{1+\epsilon^2}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{1+\epsilon^2}\}, \qquad x \mapsto x + \epsilon\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

ebenfalls glatt. Wir zeigen jetzt, dass diese Abbildung mit einem geeigneten $\delta > 0$ für alle $\epsilon < \delta$ ein Diffeomorphismus ist. Dazu betrachten wir folgende n–Differentialform:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx_0 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n.$$

Im Beispiel 3.18 haben wir gezeigt, dass ω auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat. Weil ϵ in den Koordinaten von f_ϵ linear auftaucht, hat dann $f_\epsilon^*\omega$ folgende Gestalt

$$f_\epsilon^*\omega = \left(1 + \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon^i g_i\right) \omega$$

mit glatten Funktionen $g_1, \ldots, g_{n+1}$ auf $\mathbb{S}^n$. Wegen der Kompaktheit von $\mathbb{S}^n$ gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass $f_\epsilon^*\omega$ auf $\mathbb{S}^n$ für $\epsilon < \delta$ keine Nullstellen hat. Daraus folgt, dass die Determinante der Jacobimatrix von f_ϵ auf $\mathbb{S}^n$ keine Nullstellen hat und f_ϵ eine Immersion ist. Wegen Satz 1.37 ist $f_\epsilon[\mathbb{S}^n]$ offen und als stetiges Bild einer kompakten Menge abgeschlossen. Weil $\mathbb{S}^n$ zusammenhängend ist, folgt die Surjektivität.

Zuletzt zeigen wir die Injektivität. Andernfalls gilt $f_\epsilon(x) = f_\epsilon(y)$ mit $x \neq y$, also

$$\frac{x-y}{\|x-y\|} = -\frac{\epsilon}{\|x-y\|}\left(\frac{F(x)}{\|F(x)\|} - \frac{F(y)}{\|F(y)\|}\right).$$

Wegen dem Schrankensatz ist $F/\|F\|$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L, also f_ϵ für $\epsilon L < 1$ injektiv. Das zeigt, dass f_ϵ für ein $\delta > 0$ und alle $\epsilon < \delta$ ein Diffeomorphismus ist. Für die Abbildung $h_r : x \mapsto h_r(x) = rx$ gilt $h_r^*\omega = r^{n+1}\omega$. Aus Korollar 3.22 folgt

$$\int_{\mathbb{S}^n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \epsilon^i g_i\right) \omega = \int_{\mathbb{S}^n} f_\epsilon^*\omega = \int_{\mathbb{S}^n(\sqrt{1+\epsilon^2})} \omega = \int_{\mathbb{S}^n} h_{\sqrt{1+\epsilon^2}}^*\omega = (\sqrt{1+\epsilon^2})^{n+1} \int_{\mathbb{S}^n} \omega.$$

Die linke Seite ist ein Polynom in ϵ aber die rechte Seite für gerade n nicht. **q.e.d.**

3.7 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Definition 3.25. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\} \qquad \textit{und} \qquad \partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \mid x_n = 0\}.$$

Auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{H}^n$ heißt eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ (stetig) differenzierbar, wenn f eine (stetig) differenzierbare Fortsetzung auf eine in $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{H}^n$ offene Teilmenge $V \supset U$ besitzt (siehe Korollar 1.31)

In R. T. Seeley: "Extension of smooth functions defined in a half space" Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 625-626 wird gezeigt, dass eine Funktion f auf $\mathbb{H}^n$ in diesem Sinne genau dann glatt ist, wenn f auf $\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n$ glatt ist und sich alle partiellen Ableitungen von f stetig auf $\partial\mathbb{H}^n$ fortsetzen. Analoges gilt auch für p–mal stetig differenzierbare f.

Lemma 3.26. *Sei $\phi : U \to V$ ein Homöomorphismus zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{H}^n$, und ϕ auf $U \cap (\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ und ϕ^{-1} auf $V \cap (\mathbb{H}^n \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ stetig differenzierbar mit sich stetig auf $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ bzw. $V \cap \partial\mathbb{H}^n$ fortsetzenden Jacobimatrizen. Dann gilt*

$$\phi[U \cap \partial\mathbb{H}^n] = V \cap \partial\mathbb{H}^n.$$

Beweis: Wir nehmen zunächst $\phi(x) \in V \cap \partial\mathbb{H}^n$ für ein $x \in U \cap (\mathbb{H} \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ an. Sei $W \subset U$ eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung von x. Bei $y \in \phi[W] \cap (\mathbb{H} \setminus \partial\mathbb{H}^n)$ ist die Jacobimatrix von ϕ^{-1} wegen der Kettenregel die inverse der Jacobimatrix von ϕ bei $\phi^{-1}(y)$. Wegen der Stetigkeit von den Jacobimatrizen, und weil solche y dicht in $\phi[W]$ liegen, gilt das auch für $y = \phi(x)$. Als Minimum von ϕ_n ist x ein kritischer Punkt von ϕ_n. Das widerspricht der Invertierbarkeit der Jacobimatrix von ϕ bei x. Also gilt $\phi^{-1}[V \cap \partial\mathbb{H}^n] \subset U \cap \partial\mathbb{H}^n$. Das gleiche Argument für ϕ^{-1} zeigt die umgekehrte Inklusion. **q.e.d.**

Wegen dem Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 3.36 bilden sogar alle Homöomorphismen $\phi : U \to V$ zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{H}^{n+1}$ die Mengen $\phi[U \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}]$ und $V \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$ aufeinander ab. Wie in dem Beweis von dem Lemma genügt es zu zeigen, dass es keinen Homöomorphismus ϕ von einer offenen Teilmenge W in $\mathbb{R}^n$ auf eine in $\mathbb{H}^n$ offene Umgebung $\phi[W]$ eines Punktes in $\partial\mathbb{H}^n$ gibt. Wegen dem Gebietsinvarianzsatz ist dann $\phi[W]$ offen in $\mathbb{R}^n$, und damit nicht in $\mathbb{H}^n$ enthalten.

Definition 3.27. *Eine Karte einer Mannigfaltigkeit mit Rand X ist ein Homöomorphismus ϕ einer offenen Teilmenge U von X auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{H}^n$.*

Zwei Karten $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ werde wieder verträglich genannt, wenn $\psi \circ \phi^{-1}|_{\phi[U \cap V]}$ ein Diffeomorphismus von $\phi[U \cap V]$ nach $\psi[U \cap V]$ ist. Ein Atlas ist wieder eine Menge von verträglichen Karten, deren Definitionsbreiche X überdecken.

Definition 3.28. *Eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit X mit Rand ist ein Hausdorff– und Lindelöfraum zusammen mit einem Atlas von Karten nach $\mathbb{H}^n$. Die Menge aller Punkte, die die Karten nach $\partial\mathbb{H}$ abbilden heißt Rand ∂X.*

Beispiel 3.29. *(i) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{H}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand.*

(ii) Jedes abgeschlossene endliche Intervall ist eine eindimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Allgemein gilt, dass alle Intervalle differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand sind. Der Rand von offenen Intervallen ist leer.

(iii) Eine glatte Funktion f auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ohne Rand habe keine gemeinsamen Nullstellen mit df. Dann ist $\{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Insbesodnere sind alle abgeschlossenen Bälle $\overline{B(x,r)} \subset \mathbb{R}^n$ mit $r > 0$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand.

(vi) Offenbar sind für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathbb{H}^{m+n}$ und $\mathbb{R}^m \times \mathbb{H}^n$ bzw. $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}^n$ diffeomorph. Wenn also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ist und Y eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand, dann sind $X \times Y$ und $Y \times X$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Rand. Der Rand besteht jeweils aus $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$ bzw. $\partial(Y \times X) = Y \times \partial X$.

Satz 3.30. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt:*

(i) Der Rand ∂X ist in X eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ohne Rand.

(ii) Eine offene Umgebung U von ∂X in X ist diffeomorph zu der differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Rand $U \simeq [0, 1) \times \partial X$. Eine solche Umgebung heißt Kragen.

(iii) Wenn X orientierbar ist, dann ist auch ∂X orientierbar, und jede Orientierung von X induziert zusammen mit einem stetigen Vektorfeld N, dessen Einschränkung auf ∂X nach Innen (bzw. Außen) zeigt, eine Orientierung von ∂X.

(iv) Wenn X kompakt ist, dann ist auch ∂X kompakt.

Beweis: (i) Der Rand erfüllt die Bedingung von Satz 1.45 und ist eine Untermannigfaltigkeit. Diese Untermannigfaltigkeit besitzt einen Atlas von Karten nach $\partial\mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ und ist eine Mannigfaltigkeit ohne Rand. Jeder Punkt $x \in X \setminus \partial X$ im Komplement des Randes ist im Definitionsbereich einer Karte enthalten mit $\phi_n(x) > 0$. Dann gibt ist eine ganze Umgebung von x in $X \setminus \partial X$ enthalten. Also ist ∂X abgeschlossen.

(ii) Auf jeder Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von X induziert wegen Satz 2.2 die Derivation $\frac{\partial}{\partial \phi_n}$ ein glattes Vektorfeld. Diese Vektorfelder können wir mit Hilfe einer Zerlegung der

Eins $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem globalen glatten Vektorfeld N aufsummieren. Wir zeigen jetzt, dass die Einschränkung dieses Vektorfelds N auf den Rand ∂X überall nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Sei $x \in U \cap \partial X$ und $\psi : V \to \mathbb{H}^n$ eine zweite Karte von X um $x \in V$. Dann ist $\psi \circ \phi^{-1}$ eine glatte Funktion auf $\phi[U \cap V]$, die wegen Lemma 3.26 die Hyperebene $\partial\mathbb{H}^n$ auf sich selber abbildet. Also gilt:

$$\frac{\partial(\psi_n \circ \phi^{-1})}{\partial\phi_i}(x) \begin{cases} = 0 & \text{für } i \neq n \\ > 0 & \text{für } i = n. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass der Koeffizient vor $\frac{\partial}{\partial\psi_n}(x)$ des Tangentialvektors $\frac{\partial}{\partial\phi_n}(x) \in T_xX$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_i}{\partial\phi_n}(x)\frac{\partial}{\partial\psi_i}(x)$$

positiv ist, und deshalb $\frac{\partial}{\partial\phi_n}(x)$ auch bezüglich der Karte ψ nach Innen zeigt. Daraus folgt, dass bei $x \in \partial X$ auch der Koeffizient von $N(x) \in T_xX$ vor $\frac{\partial}{\partial\psi_n}(x)$ bezüglich jeder Karte ψ, deren Definitionsbereich x enthält, positiv ist. Damit zeigt $N(x)$ bezüglich jeder Karte nach Innen und hat auf ∂X keine Nullstellen. Wegen der lokalen Endlichkeit der Zerlegung der Eins $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Definition 3.25 liegt jedes $x \in \partial X$ im Definitionsbereich einer Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^n$ von X, so dass sich im Bildbereich der Karte das Vektorfeld $T(\phi) \circ N \circ \phi^{-1}$ glatt auf eine in $\mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $\phi[U]$ fortsetzt. Dann gibt es in ∂X eine offene Umgebung V von x und ein $\epsilon > 0$, so dass der Fluss ψ_N von dem Vektorfeld N auf $[0,\epsilon) \times V$ definiert ist. Wegen Satz 1.37 können wir V und ϵ so verkleiner, dass ψ_N auf ein Diffeomeorphismus von $[0,\epsilon) \times V$ auf eine offene Teilmenge von X ist. Mit einer entsprechenden glatten Zerlegung der Eins wird die Summe der Produkte mit den konstanten Funktionen ϵ auf den Umgebungen $U \cap \partial X$ zu einer glatten positiven Funktion ϵ auf ∂X. Weil die glatte Abbildung $(t,x) \mapsto (t\epsilon(x), x)$ die Umkehrabbildung Dann $(t,x) \mapsto (t/\epsilon(x), x)$ hat, ist die Abbildung

$$[0,1) \times \partial X \to X, \quad (t,x) \mapsto \psi_N(\epsilon(x)t, x)$$

ein Diffeomorphismus von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten mit Rand auf eine offene Teilmenge von X, die damit ein Kragen ist.

(iii) Wegen (ii) gibt es auf X ein glattes Vektorfeld N, das überall auf ∂X nach Innen zeigt und keine Nullstellen auf ∂X hat. Wir können annehmen, dass X zusammenhängend und n–dimensional ist. Wegen Satz 3.17 sind die Orientierungen von X bestimmt durch nicht verschwindende stetige n–Differentialformen ω. Auf dem Rand verschwindet $d\phi_n$. Deshalb ist die Einschränkung von $i_N\omega$ auf den Rand gleich

$$i_N(\omega) = i_N(f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^{n-1}\langle d\phi_n, N\rangle f d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$$

mit einer positiven Funktion f auf dem Definitionsbereich $U \ni x$ der Karte ϕ. Wegen $\langle d\phi_n, N\rangle > 0$ induziert jede Orientierung von X durch N eine Orientierung auf ∂X.

(iv) ∂X ist wegen (i) als abgeschlossene Teilmenge von X auch kompakt. **q.e.d.**

Im Beispiel 4.10 (i) werden wir sehen, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Vektorraumbündel trivial sind. Wegen dem nächsten Satz sind dann alle $(n-1)$–dimensionalen abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten vom $\mathbb{R}^n$ orientierbar. Insbesondere ist $\mathbb{S}^{n-1}$ orientierbar. Nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten können aber in den $\mathbb{R}^n$ immersiert werden.

Satz 3.31 (Verallgemeinerter Jordanscher Kurvensatz)**.** *Sei Y eine n–dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der alle reellen Linienbündel trivial sind. Dann ist Y und jede abgeschlossene $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit X orientierbar. Wenn Y und X darüberhinaus zusammenhängend sind, dann hat $Y \setminus X$ zwei Zusammenhangskomponenten A und B mit $\bar{A} \setminus A = X = \bar{B} \setminus B$.*

Beweis: Wegen Satz 3.17 (iii) ist Y genau dann orientierbar, wenn das reelle Linienbündel $\bigwedge^n Y$ trivial ist. Also ist Y orientierbar. Sei X eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von Y. Wegen Satz 1.45 besitzt X eine Überdeckung $\mathcal{U}$ durch die Definitionsbreiche von Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ so dass $X \cap U$ die Nullstellenmenge der glatten Funktion $f_U = \phi_n$ ist. Wenn $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ eine andere solche Karte ist, dann verschwindet $\psi_n \circ \phi$ auf $\phi[U \cap V \cap X]$, aber $\frac{\partial(\psi_n\circ\phi^{-1})}{\partial\phi_j} = 0$ nur für $j \neq n$. Wegen

$$\psi_n \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi_n \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, tx_n)dt = x_n \int_0^1 \frac{\partial(\psi_n \circ \phi^{-1})}{\partial\phi_n}(x_1, \ldots, tx_n)dt$$

ist dann $\psi_n/\phi_n = f_V/f_U$ auf $U \cap V$ eine glatte Funktion $g_{V,U}$ ohne Nullstellen. Wir ergänzen $\mathcal{U}$ durch die offene Menge $Y \setminus X$ zu einer offenen Überdeckung von Y und definieren die entsprechende Funktion $f_{Y\setminus X} = 1$. Die Funktionen $g_{V,U} = f_V/f_U$ definieren einen Kozykel und damit wegen Satz 1.52 ein reelles Linienbündel auf Y. Wegen Lemma 1.58 ist dieses Linienbündel genau dann trivial, wenn es einen globalen nichtverschwindenden Schnitt gibt. Ein solcher Schnitt definiert für alle $U \in \mathcal{U}$ auf den lokalen Trivialisierungen $U \times \mathbb{R}$ eine glatte Funktion $h_U : U \to \mathbb{R}$ ohne Nullstellen, so dass $h_V = g_{V,U}h_U$ für alle $U, V \in \mathcal{U}$ auf $U \cap V$ gilt. Dann definiert $f_U/h_U = f_V/h_V$ eine globale glatte Funktion f auf Y, deren Nullstellenmenge X ist. Außerdem hat df keine gemeinsame Nullstellen mit f. Also ist $Z = \{y \in Y \mid f(y) \geq 0\}$ eine Untermannigfaltigkeit von Y mit Rand X. Als Untermannigfaltigkeit von Y der Dimension n ist Z orientierbar und dann wegen dem vorangehenden Satz (iii) X orientierbar.

Zum Beweis der zweiten Aussage bemerken wir zuerst $Y \setminus X = f^{-1}[(-\infty, 0)] \cup f^{-1}[(0, \infty)]$. Für jede Zusammenhangskomponente A einer dieser Mengen ist $\bar{A} \cap X$ in X offen, abgeschlossen und nicht leer, weil nach Satz 1.13 A sonst offen und abgschlossen in Y wäre. Mit X sind also $f^{-1}[(-\infty, 0)]$ und $f^{-1}[(0, \infty)]$ zusammenhängend. **q.e.d.**

3.8 Der Satz von Stokes

Satz 3.32. *Sei X eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n+1$. Sei ω eine stetig differenzierbare n–Differentialform auf X. Dann gilt*

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega.$$

Hierbei hat ∂X die durch die Orientierung von X und ein nach **Außen** *zeigendes Vektorfeld N (vergleiche Satz 3.30 (iii)) induzierte Orientierung.*

Beweis: Wir überdecken X durch die Definitionsbereiche eines orientierten Atlases. Mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins zerfällt ω in eine Summe von stetig differenzierbaren n–Differentialformen, die jeweils außerhalb einer kompakten Teilmenge A eines Definitionsbereiches U einer Karte $\phi : U \to \mathbb{H}^{n+1}$ verschwinden. Wegen der lokalen Endlichkeit und der Kompaktheit von X sind das nur endlich viele Summanden. Dann genügt es die Aussage für solche ω zu zeigen. Wir unterscheiden zwei Fälle:
(A) Der Definitionsbereich U der Karte enthält keine Randpunkte. Dann ist $\phi[U] \subset \mathbb{H}^{n+1}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$ und der Satz von Stokes besagt

$$\int_X d\omega = \int_A d\omega = 0.$$

Auf U können wir die n–Differentialform folgendermaßen schreiben:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} f_i d\phi_0 \wedge \ldots \widehat{d\phi}_i \ldots \wedge d\phi_n$$

Hierbei bedeutet $\widehat{\cdot}$ wieder, dass der entsprechende Faktor weggelassen wird. Dann gilt

$$d\omega = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_i \wedge d\phi_0 \wedge \ldots \widehat{d\phi}_i \ldots \wedge d\phi_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i} d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n.$$

Aufgrund der Definition des Integrals gilt dann

$$\int_A d\omega = \int_{\phi[A]} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\partial f_i}{\partial \phi_i}(\phi^{-1}(x)) dx_0 \ldots dx_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_{\phi[A]} \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Die Funktionen $f_0, \ldots, f_n$ sind auf $\phi[U]$ stetig differenzierbar und verschwinden außerhalb von A. Mit dem Wert 0 auf $\mathbb{H}^n \setminus \phi[U]$ setzt sich $f \circ \phi^{-1}$ stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{H}^{n+1}$ fort. Der Quader $Q = [a_0, b_0] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{H}^N$ enthalte $\phi[U]$:

$$\int_A d\omega = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \int_Q \frac{\partial (f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n.$$

Das ist ein mehrfaches Integral über die Intervalle $[a_0, b_0], \ldots, [a_n, b_n]$, deren Reihenfolge wir wegen dem Satz von Fubini vertauschen können: Wenn wir im i–ten Summanden

$$(-1)^i \int_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n$$

die Integration über die Variable dx_i zuerst ausführen, erhalten wir nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Differenz von $f_i \circ \phi^{-1}$ an den entsprechenden Intervallgrenzen. Weil f_i außerhalb von A verschwindet, sind diese Werte gleich Null:

$$\int_A d\omega = 0.$$

(B) Der Definitionsbereich U der Karte enthält Randpunkte. In diesem Fall verfahren wir genauso wie in Fall (A), nur dass eine Randseite des Quaders Q auf den Rand von $\mathbb{H}^{n+1}$ liegt, also a_n verschwindet. Weil die Normale N nach Außen zeigt, gilt $\langle d\phi_n, N\rangle < 0$ auf dem Rand. Wegen Satz 3.12 (vi) gilt dann auf dem Rand

$$i_N(d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_n) = (-1)^n \langle d\phi_n, N\rangle d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Also entspricht die auf dem Rand induzierte Orientierung der n–Differentialform

$$-(-1)^n d\phi_0 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}.$$

Für $i = 0, \ldots, n-1$ verschwinden $f_i \circ \phi^{-1}$ auf $\partial[a_i, b_i]$ und es gilt wie im Fall (A)

$$(-1)^i \int_Q \frac{\partial(f_i \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(x) dx_0 \ldots dx_n = 0.$$

Für $i = n$ verschwindet $f_n \circ \phi^{-1}$ nur an der Grenze b_n. Dann gilt

$$(-1)^n \int_Q \frac{\partial(f_n \circ \phi^{-1})}{\partial x_n} dx_0 \ldots dx_n = -(-1)^n \int_{Q \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}} f_n \circ \phi^{-1} dx_0 \ldots dx_{n-1}.$$

Weil auf $U \cap \partial X$ die 1–Form $d\phi_n$ verschwindet gilt dort $\omega|_{U\cap\partial X} = f_n d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_{n-1}$. Weil das Vorzeichen $-(-1)^n$ mit dem Vorzeichen der Orientierung übereinstimmt, gilt

$$\int_A d\omega = \int_{\partial X \cap A} \omega.$$ **q.e.d.**

Dieser Satz gilt genauso für stetig differenzierbare n–Differentialformen ω mit kompaktem Träger auf nicht kompakten $n+1$–dimensionalen Mannigfaltigkeiten X mit Rand. Allgemein kann man ihn auch auf nicht kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern, wenn man sicherstellt, dass die entsprechenden Integrale konvergieren.

Zum Abschluss dieses Kapitels zeigen wir mithilfe das Satzes von Stokes ein Lemma, aus dem der Fixpunktsatz und der Gebietsinvarianzsatz von Brouwer folgen.

Lemma 3.33. *Auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, die $\overline{B(0,1)}$ enthält, gibt es keine glatte Abbildung nach $\mathbb{S}^{n-1}$, deren Einschränkung auf $\mathbb{S}^{n-1}$ gleich $\mathbb{1}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ist.*

Beweis: Für jede solche Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{S}^{n-1}$ folgt aus $f_1^2 + \ldots + f_n^2 = 1$ zuerst $f_1 df_1 + \ldots + f_n df_n = 0$, und dann, weil für alle $x \in U$ mindestens eine Komponente $f_i(x)$ nicht verschwindet, auch $df_1 \wedge \ldots \wedge df_n =$

$$= df_1 \wedge \ldots \wedge df_{i-1} \wedge \frac{-f_1 df_1 - \cdots - \widehat{f_i df_i} \cdots - f_n df_n}{f_i} \wedge df_{i+1} \wedge \ldots \wedge df_n = 0.$$

Weil $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt, widerspricht das dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{B(0,1)} df_1 \wedge \ldots \wedge df_n = \int\limits_{B(0,1)} d(f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f_1 df_2 \wedge \ldots \wedge df_n \\ &= \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int\limits_{B(0,1)} d(x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \int\limits_{B(0,1)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \neq 0. \end{aligned}$$ **q.e.d.**

Fixpunktsatz von Brouwer 3.34. *Jede stetige Abbildung f von dem abgeschlossenen Einheitsball $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ auf sich selber hat einen Fixpunkt.*

Beweis: Sei f eine solche Abbildung ohne Fixpunkt. Sei $\epsilon \leq \|f(0)\| \leq 1$ das Minimum von $x \mapsto \|x - f(x)\|$ auf $\overline{B(0,1)}$. Wegen dem Satz von Stone–Weierstraß gibt es

$$p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n] \quad \text{mit} \quad \|f(x) - p(x)\| < \tfrac{\epsilon}{4} \quad \text{für alle} \quad x \in \overline{B(0,1)}.$$

Wegen $\frac{2}{2+\epsilon}(1 + \frac{\epsilon}{4}) = 1 - \frac{\epsilon}{4+2\epsilon} \leq 1 - \frac{\epsilon}{6}$ liegt das Bild $g[\overline{B(0,1)}]$ von $g(x) = \frac{2}{2+\epsilon} p(x)$ in $\overline{B(0, 1 - \frac{\epsilon}{6})}$. Weil g auf $\overline{B(0, 1+\epsilon)}$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $1 < r \leq 1 + \epsilon$, so dass auch das Bild $g[B(0,r)]$ in $B(0,1)$ liegt. Dann gilt auf $\overline{B(0,1)}$

$$\begin{aligned} \|x - g(x)\| &= \left\|x - f(x) + f(x) - p(x) + \tfrac{\epsilon}{2+\epsilon} p(x)\right\| \\ &\geq \|x - f(x)\| - \|f(x) - p(x)\| - \tfrac{\epsilon}{2}\|g(x)\| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{4} - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{4}. \end{aligned}$$

Also hat g auf $\overline{B(0,1)}$ und wegen $g[B(0,r)] \subset B(0,1)$ sogar auf $B(0,r)$ keinen Fixpunkt. Die Abbildung h, die jedes $x \in B(0,r)$ auf den eindeutigen Schnittpunkt von der Geraden durch x und $g(x)$ mit $\mathbb{S}^{n-1}$ abbildet, der auf der gleichen Seite von $g(x) \in B(0,1)$ wie x liegt, gibt es wegen Lemma 3.33 nicht, also auch kein solches f. **q.e.d.**

Wir beweisen noch mit einem auf Hausdorff zurückgehenden Spezialfalls des Fortsetzungssatzes von Tietzsche den Gebietsinvarianzsatz von Brouwer.

Lemma 3.35 (Hausdorff)**.** *Sei $f : A \to \mathbb{R}$ auf einer abschlossenen Teilmenge A eines metrischen Raums X stetig und beschränkt, und $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a)$ für alle $x \in X$. Dann läßt sich f folgendermaßen stetig und beschränkt auf X fortsetzen:*

$$g : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A, \\ \inf\limits_{a\in A} \left(f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 \right) & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

Beweis: Weil A abgeschlossen ist, ist jedes $x \in X \setminus A$ in einem Ball $B(x, \epsilon) \subset X \setminus A$ enthalten und $d(x, A) \geq \epsilon > 0$. Weil $d(x, a) \geq d(x, A)$ für alle $a \in A$ gilt, ist $g(x) \geq \inf_{a\in A} f(a)$. Also ist g wohldefiniert. Andereseits gibt es für jedes $x \in X \setminus A$ und $\epsilon > 0$ ein Element $b_x \in A$ mit $d(x, b_x) < d(x, A)(1 + \epsilon)$. Dann folgt $g(x) < f(b_x) + \epsilon$ und $g(x) \leq \sup_{a\in A} f(a)$, weil das für alle $\epsilon > 0$ gilt. Also ist g beschränkt.

Als nächstes zeigen wir die Stetigkeit von g bei $x \in A$. Mit f ist auch $g|_A$ stetig. Für jedes $y \in X \setminus A$ und $\epsilon > 0$ gibt es neben $b_y \in A$ noch ein Element $a_y \in A$ mit

$$f(a_y) + \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} - 1 - \epsilon < g(y) < f(b_y) + \epsilon.$$

Wegen $d(y, a_y) \geq d(y, A)$ liegt dann $g(y)$ in $(f(a_y) - \epsilon, f(b_y) + \epsilon)$. Für $d(y, a_y)$ folgt

$$\frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} < f(b_y) - f(a_y) + 1 + 2\epsilon \leq M + 1 + 2\epsilon \text{ mit } M = \sup_{a\in A} f(a) - \inf_{a\in A} f(a) \text{ und}$$
$$d(x, a_y) \leq d(x, y) + d(y, a_y) < d(x, y) + (M + 1 + 2\epsilon)d(y, A) \leq (M + 2 + 2\epsilon)d(x, y).$$

Genauso folgt $d(x, b_y) \leq d(x, y) + d(y, b_y) < d(x, y) + (1 + \epsilon)d(y, A) \leq (2 + \epsilon)d(x, y)$ aus der Wahl von b_y, so dass $f(a_y)$ und $f(b_y)$ wegen der Stetigkeit von f beliebig nahe bei $f(x)$ liegen, wenn $d(x, y)$ hinreichend klein ist. Also ist g bei $x \in A$ stetig.

Für $x, y \in X\setminus A$ und $\epsilon > 0$ folgt aus dem gezeigten für die entsprechenden $a_x, a_y \in A$:

$$f(a_x) + \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} - 1 - \epsilon < g(x) \leq f(a_y) + \frac{d(x, a_y)}{d(x, A)} - 1, \quad \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} < M + 1 + 2\epsilon,$$
$$f(a_y) + \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} - 1 - \epsilon < g(y) \leq f(a_x) + \frac{d(y, a_x)}{d(y, A)} - 1, \quad \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} < M + 1 + 2\epsilon,$$
$$|g(x) - g(y)| < \left| \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_x)}{d(y, A)} \right| + \left| \frac{d(x, a_y)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} \right| + \epsilon.$$

Aus $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ für $a \in A$ folgt durch Vertauschen $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$ und $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Dann ist g bei $x \in X \setminus A$ stetig, wegen

$$\left| \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_x)}{d(y, A)} \right| \leq \frac{d(x, a_x)}{d(x, A)} \frac{|d(y, A) - d(x, A)|}{d(y, A)} + \frac{|d(x, a_x) - d(y, a_x)|}{d(y, A)},$$
$$\left| \frac{d(x, a_y)}{d(x, A)} - \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} \right| \leq \frac{|d(x, a_y) - d(y, a_y)|}{d(x, A)} + \frac{d(y, a_y)}{d(y, A)} \frac{|d(y, A) - d(x, A)|}{d(x, A)}.$$

q.e.d.

Gebietsinvarianzsatz von Brouwer 3.36. *Das Bild $f[U]$ einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ unter einer injektiven stetigen Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$ ist offen.*

Beweis: Um jedes $x \in U$ ist für ein $r > 0$ der abgeschlossener Ball $\overline{B(x,r)}$ von $\mathbb{R}^n$ in U enthalten. Deshalb genügt es für eine stetige injektive Abbildung $f : \overline{B(x,r)} \to \mathbb{R}^n$ zu zeigen, dass $B(f(x),\epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ in $f[\overline{B(x,r)}]$ liegt. Weil alle abgeschlossenen Bälle homöomorph sind, genügt es eine stetige injektive Abbildung auf $B = \overline{B(0,1)}$ zu betrachten. Weil das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von B kompakt ist, ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : f[B] \to B$ stetig und $A = f[B]$ kompakt. Wegen Lemma 3.35 gibt es eine stetige Fortseztung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von f^{-1}. Wegen $g(f(0)) = 0$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $\|g(y)\| < \frac{1}{3}$ auf $y \in B(f(0), 2\epsilon)$ gilt. Wir zeigen jetzt $B(f(0),\epsilon) \subset A$. Andernfalls sei $z \in B(f(0),\epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Dann liegt $f(0)$ in $B(z,\epsilon) \cap A$ und damit außerhalb der beiden folgenden kompakten Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$:

$$C = \{y \in A \mid \|y - z\| \geq \epsilon\} \supset f[B \setminus B(0, \tfrac{1}{3})], \qquad D = \partial B(z,\epsilon).$$

Also hat g auf C keine Nullstellen. Sei $\delta = \min\{\|g(y)\| \mid y \in C\} \cup \{\frac{1}{3}\} > 0$. Wegen $z \notin A$ bildet die folgende stetige Abbildung $y \in C$ auf y und $A \setminus C$ nach $D \subset B(f(0), 2\epsilon)$ ab:

$$h : A \to C \cup D, \qquad y \mapsto z + (y - z) \max\left\{1, \frac{\epsilon}{\|y - z\|}\right\}.$$

Wegen dem Satz von Stone–Weierstraß gibt es Polynome

$$p = (p_1, \ldots, p_n) \in \big(\mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]\big)^n \quad \text{mit} \quad \|p(y) - g(y)\| < \tfrac{\delta}{2} \quad \text{für alle} \quad y \in C \cup D.$$

Für alle $q \in B(0, \frac{\delta}{2}) \subset \mathbb{R}^n$ hat dann $p - q$ auf C keine Nullstellen. Weil p auf $B(z, 2\epsilon)$ lipschitzstetig ist, ist $p[D]$ genauso wie D eine Nullmenge des $\mathbb{R}^n$. Für $q \in B(0, \frac{\delta}{2}) \setminus p[D]$ hat dann $p \circ h - q$ auf A keine Nullstellen und erfüllt auf $y \in C$

$$\|g(y) - p(h(y)) + q\| \leq \|g(y) - p(y)\| + \|q\| < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} \leq \tfrac{1}{3}.$$

Auf $y \in A \setminus C$ liegen $y, h(y) \in B(f(0), 2\epsilon)$ und $g(y), g(h(y)) \in B(0, \frac{1}{3})$. Also folgt

$$\begin{aligned}\|g(y) - p(h(y)) + q\| &\leq \|g(y) - g(h(y)) + g(h(y)) - p(h(y)) + q\| \\ &\leq \|g(y)\| + \|g(h(y))\| + \|p(h(y) - g(h(y))\| + \|q\| < \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} \leq 1.\end{aligned}$$

Wegen dem Fixpunktsatz von Brouwer hat dann folgende Abbildung einen Fixpunkt

$$\overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}, \qquad x \mapsto x - p(h(f(x))) + q = g(f(x)) - p(h(f(x))) + q$$

Also hat $p \circ h - q$ auf A eine Nullstelle im Widerspruch zu $B(f(0),\epsilon) \not\subset A$. **q.e.d.**