Kapitel 2

Vektorfelder

2.1 Vektorfelder und Integralkurven

Definition 2.1. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine Abbildung $F : X \to TX$ mit $\pi \circ F = \mathbb{1}_X$ Vektorfeld von X. Den Raum aller Vektorfelder auf X bezeichnen wir mit* $\mathrm{Vec}(X)$. *Für $r \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet* $\mathrm{Vec}^r(X)$ *den Raum aller r mal stetig differenzierbaren Vektorfelder und* $\mathrm{Vec}^\infty(X)$ *den Raum aller glatten Vektorfelder.*

Satz 2.2. *Sei $r \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann definiert jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ für alle $p = 0, \ldots, r$ eine lineare Derivation*

$$\theta_F : C^{p+1}(X, \mathbb{R}) \to C^p(X, \mathbb{R}) \quad \textit{mit} \quad \theta_F(f \cdot g) = f \cdot \theta_F(g) + \theta_F(f) \cdot g,$$

und die Zuordnung $F \mapsto \theta_F$ ist injektiv. Umgekehrt gibt es für jede lineare Derivation

$$\theta : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to C^r(X, \mathbb{R}) \textit{ mit } \theta(fg) = f\,\theta(g) + \theta(f)g \textit{ ein } F \in \mathrm{Vec}^r(X) \textit{ mit } \theta = \theta_F\,.$$

Beweis: Für $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ist die Abbildung θ_F von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ in die reellen Funktionen auf X, deren Abbild punktweise bei $x \in X$ durch $\theta_F(f)(x) = D_{F(x)}(f)$ mit der Abbildung $D_{F(x)}$ aus Satz 1.40 definiert ist, linear und eine Derivation. Wir zeigen jetzt, dass θ_F sogar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. Wenn wir mit einer Karte ϕ dem Vektorfeld F eine r mal stetig differenzierbare Abbildung $x \mapsto T_x(\phi)(F(x)) \in T_{\phi(x)}\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n$ von dem Definitionsbereich $U \subset X$ der Karte nach $\mathbb{R}^n$ zuordnen, dann ist

$$\theta_F(f)(x) = T_x(\phi)(F(x)) \cdot \nabla(f|_U \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \qquad \text{für alle } x \in U.$$

Hierbei ist $T(\phi) \circ F|_U$ die Abbildung $U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times U$. Dann bildet $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ offenbar $C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ ab. Aus $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ folgt für alle $p = 0, \ldots, r$ auch $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$, so dass θ_F auch $C^{p+1}(X, \mathbb{R})$ nach $C^p(X, \mathbb{R})$ abbildet.

Umgekehrt ist F wegen dem Satz 1.40 eindeutig durch θ_F bestimmt und genau dann r mal stetig differenzierbar, wenn θ_F $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ abbildet. **q.e.d.**

Korollar 2.3. *Für Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^p(X)$ und $G \in \mathrm{Vec}^q(X)$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gibt es genau ein Vektorfeld $[F, G] \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit*

$$r = \min\{p-1, q-1\} \quad \textit{und} \quad \theta_{[F,G]} = \theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F\,.$$

Beweis: Offenbar ist $\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F$ eine lineare Abbildung von $C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach $C^r(X, \mathbb{R})$ auch eine Derivation. Für alle $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
(\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f \cdot g) &= \theta_F(\theta_G(f \cdot g)) - \theta_G(\theta_F(f \cdot g)) \\
&= \theta_F(f\,\theta_G(g) + \theta_G(f)g) \qquad -\theta_G(f\,\theta_F(g) + \theta_F(f)g) \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(f)\,\theta_G(g) \qquad + \theta_G(f)\,\theta_F(g) + \theta_F(\theta_G(f))g \\
&\quad - f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(f)\,\theta_F(g) \qquad - \theta_F(f)\,\theta_G(g) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f\,\theta_F(\theta_G(g)) + \theta_F(\theta_G(f))g \qquad - f\,\theta_G(\theta_F(g)) - \theta_G(\theta_F(f))g \\
&= f \cdot (\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(g) \qquad + (\theta_F \circ \theta_G - \theta_G \circ \theta_F)(f) \cdot g.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Das Tangentialbündel eines endlichdimensionalen normierten Vektorraumes V ist auf natürliche Weise isomorph zu $TV \simeq V \times V$. Insbesondere ist das Tangentialbündel eines offenen Intervalls I auf natürliche Weise isomorph zu $\mathbb{R} \times I$. Deshalb enthält der Tangentialraum $T_tI \simeq \mathbb{R}$ für alle $t \in I$ außer der Null noch das Element $1_{T_t\mathbb{R}}$, das $(1, t) \in \mathbb{R} \times I \simeq TI$ entspricht, also die Äquivalenzklasse von $(-\epsilon, \epsilon) \to I$, $s \mapsto s + t$.

Definition 2.4. *Eine Integralkurve x eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}(X)$, ist eine differenzierbare Abbildung $x : I \to X$, $t \mapsto x(t)$ von einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach X, so dass $s \mapsto x(t + s)$ für alle $t \in I$ dem Element $F(x(t)) \in T_{x(t)}X$ entspricht. D.h. $T_t(x)$ bildet $1_{T_t\mathbb{R}} \in T_tI$ für alle $t \in I$ auf $F(x(t)) \in T_{x(t)}X$ ab. Wenn $t_0 \in I$ und $x(t_0) = x_0 \in X$ gilt, dann heißt x Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$.*

Wir werden jetzt zeigen, dass jedes Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ für jedes $x_0 \in X$ genau eine Integralkurve mit Anfangswert x_0 besitzt. Diese Aussage ist eine Umformulierung der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.5. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt:*

(i) (Existenz von Integralkurven) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung

$$x : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \to X, \quad t \mapsto x(t) \quad \textit{mit} \quad x(t_0) = x_0,$$

die eine Integralkurve von F mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ ist.

(ii) *(Eindeutigkeit von Integralkurven) Seien x und y zwei Integralkurven von F auf offenen Intervallen I bzw. J. Wenn $t_0 \in I \cap J$ und $x(t_0) = y(t_0)$ gilt, dann stimmen $x(t)$ und $y(t)$ für alle $t \in I \cap J$ überein.*

Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit mit Hilfe von Karten von X bei x_0 bzw. $x(t_0)$ und der Existenz und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.6. *(Picard–Lindelöf) Sei $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine lipschitzstetige Abbildung auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ so dass das folgende Anfangswertrpoblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ eindeutig lösbar ist:*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \quad \textit{für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \quad \textit{und} \quad x(t_0) = x_0.$$

Beweis: Wegen der Lipschitzstetigkeit gibt es ein $L > 0$, so dass für alle $(s, y), (t, z) \in U$ auch $\|f(s, y) - f(t, z)\| \leq L(|s - t| + \|y - z\|)$ gilt. Sei $\delta > 0$ so gewählt, dass U das kartesische Produkt $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ der beiden abgeschlossenen δ–Bälle um t_0 und x_0 enthält. Dann gilt für alle $(s, y) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B(x_0, \delta)}$ auch $\|f(s, y)\| \leq \|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta$. Wegen der Stetigkeit von f ist die Abbildung

$$F : x \mapsto F(x) \quad \text{mit} \quad F(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

eine stetige Abbildung von $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \overline{B(x_0, \delta)})$ nach $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. Wenn $\epsilon \leq \delta$ und $\epsilon\,(\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta) \leq \delta$, dann bildet sie wegen dem Schrankensatz $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber ab. Für $x, y \in C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ gilt dann

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \epsilon L \|x - y\|_\infty.$$

Sei also ϵ kleiner als

$$\epsilon \leq \min\left\{\delta, \frac{\delta}{\|f(t_0, x_0)\| + 2L\delta}\right\} \leq \frac{1}{2L}.$$

Dann definiert die Abbildung F eine lipschitzstetige Abbildung mit Lipschitzkonstante $\epsilon \cdot L \leq 1/2$ von dem vollständigen metrischen Raum $C([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], \overline{B(x_0, \delta)})$ auf sich selber. Jeder Fixpunkt ist wegen dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung stetig differenzierbar und es gilt $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ für alle $t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ mit $x(t_0) = x_0$. Also löst x dieses Anfangswertproblem auf $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$.

Wenn umgekehrt x auf einer Umgebung von t_0 dieses Anfangswertproblem löst, dann ist x stetig differenzierbar. Deshalb ist die Ableitung von $F(x) - x$ gleich Null, und beide Funktionen $F(x)$ und x sind bei $t = t_0$ gleich x_0. Also stimmen beide Funktionen überein und jede Lösung des obigen Anfangswertproblems ist ein Fixpunkt von F. Also folgt die Existenz und Eindeutigkeit dieses Anfangswertproblems auf $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz. **q.e.d.**

Beweis der Existenz und Eindeutigkeit von Integralkurven:
(i) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte um $x_0 \in X$. Dann definiert

$$f = p_1 \circ T(\phi) \circ F|_U \circ \phi^{-1} : \phi[U] \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{F|_U} TU \xrightarrow{T(\phi)} T\phi[U] \simeq \mathbb{R}^n \times \phi[U] \xrightarrow{p_1} \mathbb{R}^n$$

eine einmal stetig differenzierbare Abbildung. Wegen dem Schrankensatz gibt es ein $r > 0$, so dass die Einschränkung auf $\overline{B(\phi(x_0), r)} \subset \phi[U]$ lipschitzstetig ist mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Dann folgt aus dem Satz von Picard–Lindelöf, dass

$$\tilde{x} : (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \to \phi[U], \quad \tilde{x} \mapsto \tilde{x}(t)$$

für ein $\epsilon > 0$ als eindeutige Lösung folgenden Anfangswertproblems existiert:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = f(\tilde{x}(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \quad \text{mit} \quad \tilde{x}(t_0) = \phi(x_0).$$

Für jedes $t \in (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ bildet $T_t(\tilde{x})$ aufgrund der Definition der Ableitung das Element $1_{T_t\mathbb{R}} \in T_t(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ auf $(\frac{d\tilde{x}(t)}{dt}, \tilde{x}(t)) = (f(\tilde{x}(t)), \tilde{x}(t)) \in \mathbb{R}^n \times \phi[U] \simeq T\phi[U]$ ab. Wegen $T_t(x)1_{T_t\mathbb{R}} = T_{\tilde{x}(t)}(\phi^{-1}) \circ T_t(\tilde{x})1_{T_t\mathbb{R}} = F(x(t))$ ist dann $x = \phi^{-1} \circ \tilde{x}$ eine Integralkurve von F durch $x(t_0) = x_0$, wenn $\tilde{x}$ obiges Anfangswertproblem löst.
(ii) Sei $s \in I \cap J$ mit $z = x(s) = y(s)$ und $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ wieder eine Karte bei $z \in U$. Dann definieren $\tilde{x} = \phi \circ x$ und $\tilde{y} = \phi \circ y$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \quad \text{für alle } t \text{ in einer Umgebung von } s \quad \text{mit} \quad \tilde{x}(s) = \phi(z).$$

Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf gilt $\tilde{x} = \tilde{y}$ auf einer Umgebung von s. Weil ϕ injektiv ist folgt $x(t) = y(t)$ auf einer Umgebung von s. Daraus folgt, dass die Menge $\{t \in I \cap J \mid x(t) = y(t)\}$ offen und, wegen der Stetigkeit von x und y, abgeschlossen ist. Weil I und J Intervalle sind und $t_0 \in I \cap J$ ist $I \cap J$ ein nicht leeres Intervall und damit zusammenhängend. Also gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in I \cap J$. **q.e.d.**

Satz 2.7. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ und $x_0 \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Integralkurve $x : I \to X$ von F mit $x(0) = x_0$, so dass jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(0) = x_0$ eine Einschränkung von x auf ein Teilintervall J von I ist, das 0 enthält. Allgemeiner ist jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(t_0) = x_0$ von der Form:*

$$y(t+t_0) = x(t) \text{ für alle } t+t_0 \in J, \text{ wobei } \{t \in \mathbb{R} \mid t+t_0 \in J\} \subset I.$$

Beweis: Sei I die Vereinigung der Definitionsbereiche aller Integralkurven x von F mit $x(0) = x_0$. Wegen der Existenz und Eindeutigkeit der Integralkurven gibt es dann eine eindeutige Integralkurve x auf I mit $x(0) = x_0$, so dass jede Integralkurve von F mit $y(0) = x_0$ durch Einschränken der Integralkurve x auf ein Teilintervall von I entsteht. Offenbar ist für jede Integralkurve $y : J \to X$ von F mit $y(t_0) = x_0$ die Abbildung

$$x : \{t \in \mathbb{R} \mid t + t_0 \in J\} \to X, \quad t \mapsto x(t) = y(t + t_0)$$

eine Integralkurve von F mit $x(0) = x_0$. Daraus folgt die zweite Behauptung. **q.e.d.**

2.2 Flüsse und Vektorfelder

Wir wollen jetzt alle maximalen Integralkurven aus dem vorangehenden Satz zu Abbildungen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \times X$ nach X zusammensetzen.

Definition 2.8. *Sei X ein topologischer Raum, $W \subset \mathbb{R} \times X$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $\psi : W \to X$ mit folgenden Eigenschaften heißt lokaler Fluss auf X:*

(i) Für alle $x \in X$ ist $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in W\}$ ein offenes Intervall, das die Null enthält.

(ii) Sei $(s, x) \in W$ und $(t, \psi(s, x)) \in W$, dann ist auch $(t + s, x) \in W$ und es gilt

$$\psi(t, \psi(s, x)) = \psi(t + s, x).$$

(iii) Für alle $x \in X$ gilt $\psi(0, x) = x$.

Lemma 2.9. *Für einen stetigen lokalen Fluss ψ auf dem topologischen Raum X gilt:*

(i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $V_t = \{x \in X \mid (t, x) \in W\}$ offen und die Abbildung

$$\psi(t, \cdot) : V_t \to V_{-t}, \quad x \mapsto \psi(t, x)$$

ein Homöomorphismus mit der inversen Abbildung $\psi(-t, \cdot)$.

(ii) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x, so dass W die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ enthält. Für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sind insbesondere V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x und $\psi(t, \cdot)$ ein Homöomorphismus von der offenen Umgebung V_t von x auf die offene Umgebung V_{-t} von x.

Beweis: Für alle $(t_0, x_0) \in W$ ist W eine offene Umgebung von $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset X$ von x_0, so dass $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$ in W enthalten ist. Also sind für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen V_t offen.

Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in V_t$. Wir führen den Beweis für $t > 0$. Für $t < 0$ geht er analog. Aus der Bedingung (i) folgt $W \supset \{(s,x) \mid s \in [0,t]\} = \{(t+s,x) \mid s \in [-t,0]\}$. Für jedes $s \in [-t,0]$ gibt es ein $\epsilon_s > 0$ und eine offene Umgebung $U_s \subset X$ von $\psi(t+s,x)$ mit $(-\epsilon_s,\epsilon_s) \times U_s \subset W$. Die offene Überdeckung $(U_s)_{s\in[-t,0]}$ der kompakten Menge $\{\psi(t+s,x) \mid s \in [-t,0]\}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Sei $\epsilon > 0$ das Minimum der entsprechenden $(\epsilon_s)_{s\in[0,1]}$. Aus der Bedingung (ii) folgt für alle $s \in [-t,0]$

$$(r,\psi(t+s,x)),(t+s+r,x) \in W \text{ und } \psi(r,\psi(t+s,x)) = \psi(t+s+r,x) \text{ für alle } r \in (-\epsilon,\epsilon).$$

Wenn $(s,\psi(t,x))$ in W liegt, dann folgt wegen der Bedingung (ii) $(r,\psi(s,\psi(t,x))) = (r,\psi(s+t,x)) \in W$ und damit auch $(s+r,\psi(t,x)) \in W$ und $(t+s+r,x) \in W$ und $\psi(s+r,\psi(t,x)) = \psi(t+s+r,x)$. Induktiv folgt $(s,\psi(t,x)) \in W$ und $\psi(s,\psi(t,x)) = \psi(t+s,x)$ zuerst für $s = 0$ und dann für alle $s \in [-t,0]$. Also liegt $\psi(t,x)$ in V_{-t} und $\psi(-t,\cdot)$ ist die Umkehrabbildung von $\psi(t,\cdot)$. Dann sind $\psi(t,\cdot)$ und $\psi(-t,\cdot)$ Homöomorphismen.

Danach folgt (ii) aus dem Beweis von (i). **q.e.d.**

Satz 2.10. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau einen r mal stetig differenzierbaren Fluss $\psi_F : W_F \subset \mathbb{R} \times X \to X$, so dass für alle $x \in X$ die maximale Integralkurve von F durch x aus Satz 2.7 gleich*

$$\{t \in \mathbb{R} \mid (t,x) \in W_F\} \to X, \quad t \mapsto \psi_F(t,x) \quad \text{mit} \quad \psi_F(0,x) = x$$

ist. Die partielle Ableitung von ψ_F nach t ist dabei auch r mal stetig differenzierbar.

Umgekehrt gibt es für jeden r mal stetig differenzierbaren Fluss $\psi : W \subset \mathbb{R} \times X \to X$, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist, ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $W \subset W_F$ und $\psi = \psi_F|_W$.

Wir beweisen diesen Satz wieder mit Hilfe eines Satzes über Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 2.11. *Sei $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und U eine offene Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine r mal stetig differenzierbare Abbildung mit $r \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine offene Umgebung W von x_0 in U, ein $\epsilon > 0$ und eine r mal stetig differenzierbare Funktion $h : (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \times W \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in W$ die Funktion*

$$x : (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto h(t,y)$$

die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0-\epsilon,t_0+\epsilon) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = y.$$

Die partielle Ableitung von h nach t ist sogar auch r mal stetig differenzierbar.

Beweis: Wir benutzen den Satz der impliziten Funktion. Weil U eine offene Umgebung von x_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass U den abgeschlossenen Ball $\overline{B(x_0,\delta)}$ enthält. Wegen Heine–Borel ist $\overline{B(x_0,\delta)}$ kompakt. Weil f stetig differenzierbar ist, gibt es dann eine obere Schranke $L > 0$ an die Norm von $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auf $x \in \overline{B(x_0,\delta)}$. Wegen dem Schrankensatz ist dann f lipschitzstetig auf $\overline{B(x_0,\delta)}$ mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Sei also $0 < \epsilon \leq \frac{\delta}{2\|f(x_0)\|+2L\delta}$ so ähnlich gewählt wie in dem Beweis des Satzes von Picard–Lindelöf. Sei I das abgeschlossene Intervall $I = [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ und V die offene Umgebung $V = B(x_0,\delta/2)$ von $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wieder ist für alle $y \in V$ die Abbildung

$$F_y : C(I,\overline{B(x_0,\delta)}) \to C(I,\overline{B(x_0,\delta)}),\ x \mapsto F_y(x) \text{ mit } \ F_y(x)(t) = y + \int_{t_0}^t f(x(s))ds$$

von dem vollständigen metrischen Raum $C(I,\overline{B(x_0,\delta)})$ auf sich selber lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\epsilon L \leq 1/2$. Wegen der Ungleichung $\delta/2 + \epsilon(\|f(x_0)\| + L\delta) \leq \delta/2 + \delta/2 = \delta$ liegen die Bilder aller Abbildungen $(F_y)_{y\in V}$ sogar in der offenen Teilmenge $C(I,B(x_0,\delta))$ des Banachraumes $C(I,\mathbb{R}^n)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Deshalb liegen die entsprechenden Fixpunkte in dieser offenen Teilmenge. Für alle $y \in V$ ist die Ableitung der Abbildung $x \mapsto F_y(x)$, als Abbildung der offenen Teilmenge $C(I,B(x_0,\delta))$ von $C(I,\mathbb{R}^n)$ auf sich selber gegeben durch

$$\begin{aligned} F'_y(x) : C(I,\mathbb{R}^n) &\to C(I,\mathbb{R}^n), & z \mapsto& F'_y(x)(z) \quad \text{mit} \\ F'_y(x)(z)(t) &= \int_{t_0}^t f'(x(s))(z(s))ds & &\text{für alle } t \in I. \end{aligned}$$

Weil die Ableitungen $f'(s,x(s))$ beschränkt sind durch L, ist die Ableitung $F'_y(x)$ beschränkt durch $L\epsilon \leq 1/2$. Deshalb konvergiert für alle $y \in V$ und alle $x \in C(I,B(x_0,\delta))$ die Neumannsche Reihe

$$\left(\mathbb{1}_{C(I,\mathbb{R}^n)} - F'_y(x)\right)^{-1} = \sum_{l=0}^\infty \left(F'_y(x)\right)^l$$

in $\mathcal{L}(C(I,\mathbb{R}^n))$ gegen den inversen Operator von $\mathbb{1}_{C(I,\mathbb{R}^n)} - F'_y(x)$. Offenbar ist für alle $y,z \in V$ die punktweise Differenz $F_y(x) - F_z(x)$ eine konstante Abbildung in $C(I,\mathbb{R}^n)$:

$$F_y(x) - F_z(x) = y - z.$$

Deshalb ist für jedes $x \in C(I,B(x_0,\delta))$ die Abbildung $y \mapsto F_y(x)$ eine glatte Abbildung von V nach $C(I,\mathbb{R}^n)$. Also ist die Abbildung

$$G : V \times C(I,B(x_0,\delta)) \to C(I,\mathbb{R}^n), \quad (y,x) \mapsto \left(\mathbb{1}_{C(I,B(x_0,\delta))} - F_y\right)(x) = x - F_y(x)$$

eine stetig differenzierbare Abbildung und besitzt auf dem gesamten Definitionsbereich eine invertierbare partielle Ableitung nach $x \in C(I, B(x_0, \delta))$. Das Urbild der $0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$ besteht genau aus den Fixpunkten der Abbildungen F_y. Dann folgt aus dem Satz der impliziten Funktion, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung g von einer Umgebung W von $x_0 \in V$ auf die entsprechenden Fixpunkte der Abbildungen F_y gibt. Diese Abbildung ist außerdem genauso oft stetig differenzierbar, wie G. An den expliziten Formeln für die ersten partiellen Ableitungen von F_y erkennt man, dass die partiellen Ableitungen von G bis zur selben Ordnung stetig sind, bis zu der auch die partiellen Ableitungen von f stetig sind. Also ist G genauso oft wie f stetig differenzierbar. Für alle $y \in W$ ist dann $g(y)$ die eindeutig Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \quad \text{für alle } t \in (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \quad \text{mit} \quad x(t_0) = y.$$

Alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung r von der Abbildung

$$h : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times W \to \mathbb{R}, \quad (y, t) \mapsto h(t, y) = g(y)(t)$$

sind stetig. Deshalb ist diese Abbildung auch r mal stetig differenzierbar. Weil $t \mapsto h(t, y)$ das obigen Anfangswertproblem löst, ist die partielle Ableitung von $h(t, y)$ nach t gleich $\frac{\partial h(t,y)}{\partial t} = f(h(t, y))$ und damit auch r mal stetig differenzierbar. **q.e.d.**

Beweis von Satz 2.10: Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld. Für alle $x \in X$ sei I_x der Definitionsbereich der maximalen Integralkurven aus Satz 2.7 mit Anfangswert $x(0) = x \in X$ und $W_F = \bigcup_{x \in X} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times X$. Für $x \in X$ definieren wir $t \mapsto \psi_F(t, x)$ auf $t \in I_x$ als diese maximale Integralkurve $t \mapsto x(t)$ mit $x(0) = x = \psi_F(0, x)$. Dann erfüllt $\psi_F : W_F \to X$ die Bedingungen (i) und (iii).

Für $(s, x) \in W_F$ und $(t, \psi_F(s, x)) \in W_F$ stimmen die beiden Integralkurven mit Anfangswert $x(0) = x$ und $x(s) = \psi_F(s, x)$ bei s, und wegen der Eindeutigkeit von Integralkurven auf der Schnittmenge ihrer Definitionsbereich überein. Sie ergänzen sich zu eine Integralkurve auf einem Intervall das sowohl 0, als auch s und $t + s$ enthält mit $x(0) = x$, $x(s) = \psi_F(s, x)$ und $x(t + s) = \psi_F(t, \psi_F(s, x))$. Also erfüllt ψ_F auch (ii).

Es bleibt zu zeigen, dass W in $\mathbb{R} \times X$ offen ist und ψ_F zusammen mit $\frac{\partial \psi_F}{\partial t}$ r mal stetig differenzierbar ist. Sei $(t, x) \in W_F$ mit $t \geq 0$. Für $t < 0$ geht der Beweis analog. Für $s \in [0, t]$ liegt $\psi_F(s, x)$ im Definitionsbereich U_s einer Karte ϕ_s. Wie im Beweis von Satz 2.5 entsprechen den Integralkurven x von F in U_s Lösungen $\tilde{x} = \phi_s \circ x$ von

$$\begin{aligned} &\frac{d\tilde{x}}{dt}(t) = f(\tilde{x}(t)) \quad \text{mit} && \tilde{x}(t_0) = \phi_s(x_0) \quad \text{und dem Vektorfeld} \\ &f : \phi_s[U_s] \to \mathbb{R}^n, && y \mapsto f(y) = T_{\phi_s^{-1}(y)}(\phi_s)(F(\phi_s^{-1}(y))). \end{aligned}$$

Deshalb folgt aus Satz 2.11 dass ψ_F und $\frac{\partial \psi_F}{\partial t}$ für jedes $s \in [0, t]$ auf einer offenen Umgebung $(-\epsilon_s, \epsilon_s) \times V_s \subset W_F$ von $(0, \psi_F(s, x))$ r–mal stetig differenzierbar sind. Die kompakte Menge $\{\psi_F(s,x) \mid s \in [0,t]\}$ wird von den offenen Mengen V_s zu endlich vielen $s \in [0,t]$ überdeckt. Sei ϵ das Minimum der entsprechedenc $\frac{\epsilon_s}{2}$. Dann liegen alle $\psi_F(l\epsilon, x)$ mit $0 \le l \le \frac{t}{\epsilon}$ in einer V_{s_l} zu den endlich vielen s. Wir definieren für $1 \le l \le \frac{t}{\epsilon}$ induktiv offene Umgebungen $V_{s_0} = O_0 \supset O_1 \supset \ldots \supset O_l \supset \ldots \supset O$ von x:

$$O_l = \{y \in O_{l-1} \mid \psi(l\epsilon, y) \in V_{s_l}\} \quad \text{mit} \quad (-2\epsilon, (2+l)\epsilon) \times O_l \subset W_F.$$

Die kleinste O wird für $0 \le l \le \frac{t}{\epsilon}$ durch $\big(\psi_F(\epsilon, \cdot)\big)^l$ nach V_{s_l} abgebildet. Auf der offenen Umgebung $(-2\epsilon, t+\epsilon) \times O$ von (t,x) ist ψ_F mit $\frac{\psi_F}{\partial t}$ r mal stetig differenzierbar.

Sei umgekehrt $\psi : W \to X$ ein r mal stetig differenzierbarer Fluss auf X, dessen partielle Ableitung nach t auch r mal stetig differenzierbar ist. Für alle $(t,x) \in W$ und $(s, \psi(t,x)) \in W$ und jede Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ von X um $\psi(t,x)$ und $\psi(t+s,x)$ gilt

$$\frac{\partial \phi(\psi(t+s,x))}{\partial t} = \frac{\partial \phi(\psi(t+s,x))}{\partial s} = \frac{\partial \phi(\psi(s,\psi(t,x)))}{\partial s}$$

wegen (ii). Mit $s = 0$ folgt, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t}$ an der Stelle (t,x) gleich der partiellen Ableitung von $\frac{\partial \psi(s,\psi(t,x))}{\partial s}$ an der Stelle $(0, \psi(t,x)) = \psi(t,x)$ ist. Sei also $F \in \mathrm{Vec}(X)$: das Vektorfeld von X, das jedem $x \in X$ den Funktionswert der Abbildung

$$T_{(0,x)}(\psi) : T_{(0,x)}W \to T_xX$$

bei dem Element $(1_{T_0\mathbb{R}}, 0) \in T_0\mathbb{R} \times T_xX \simeq T_{(0,x)}W$ zuordnet. Weil die partielle Ableitung von ψ nach t r mal stetig differenzierbar ist, ist F r mal stetig differenzierbar. Dann ist für jedes $x \in X$, die Abbildung $t \mapsto \psi(t,x)$ eine Integralkurve des Vektorfeldes F. Aus der Eindeutigkeit von Integralkurven folgt, dass ψ eine Einschränkung von ψ_F auf die offene Teilmenge W des entsprechenden Definitionsbereiches W_F ist. **q.e.d.**

Aus Lemma 2.9 und Satz 2.10 folgt

Korollar 2.12. *Sei $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein Vektorfeld auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X mit $r \in \mathbb{N}$. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $V_t = \{x \in X \mid (t,x) \in W_F\}$ eine offene Teilmenge von X und die Abbildung $x \mapsto \psi_F(t,x)$ ist ein r mal stetig differenzierbarer Homöomorphismus von V_t nach V_{-t} mit r mal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $x \mapsto \psi_F(-t,x)$. Außerdem gibt es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind.* **q.e.d.**

Definition 2.13. *(i) Ein lokaler Fluss $\psi : W \to X$ auf einem topologischen Raum X heißt globaler Fluss, wenn $W = \mathbb{R} \times X$ ist.*

(ii) Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X heißt vollständig, wenn der entsprechende Fluss ψ_F ein globaler Fluss ist.

Satz 2.14. *(i) Auf einem kompakten topologischen Raum X sind lokale Flüsse global.*

(ii) Auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit X sind Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ vollständig.

Beweis: (i) Wegen Lemma 2.9 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon_x > 0$ und eine offene Umgebung U_x von x so dass $W \supset (-\epsilon_x, \epsilon_x) \times U_x$ enthält. Die Überdeckung $(U_x)_{x \in X}$ von X, hat eine endliche Teilüberdeckung. Mit dem Minimum $\epsilon > 0$ der entsprechenden ϵ_x enthält $W \supset (\epsilon, \epsilon) \times X$. Wegen der Bedingung (ii) des Flusses ist dann mit jedem (t, x) auch $\{(t+s, x) \in \mathbb{R} \times X | s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ in W enthalten. Wegen $\{0\} \times X \subset W$, folgt induktiv für alle $l \in \mathbb{N}$, dass W folgende Mengen enthält, also gleich $\mathbb{R} \times X$ ist:

$$(-(l+1)\epsilon, (l+1)\epsilon) \times X = \{(t+s, x) \in \mathbb{R} \times X \mid (t, x) \in (-l\epsilon, l\epsilon) \times X, s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

(ii) folgt aus (i) und Satz 2.10 **q.e.d.**

Wir haben in dem Beweis von (i) nur benutzt, dass der Definitionsbereich W des Flusses ψ für ein $\epsilon > 0$ die Menge $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ enthält, bzw. die Integralkurven von F mit allen Anfangswerten $x(0) \in X$ auf einem Intervall $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind.

Korollar 2.15. *(i) Ein lokaler Fluss auf einem topologischen Raum ist genau dann ein globaler Fluss, wenn $(-\epsilon, \epsilon) \times X$ für ein $\epsilon > 0$ in W enthalten ist.*

(ii) Ein Vektorfeld $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist genau dann vollständig, wenn für ein $\epsilon > 0$ und alle $x \in X$ die Integralkurven von F mit Anfangswert $x(0) = x$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ definiert sind. **q.e.d.**

Korollar 2.16. *(i) Für globale stetige Flüsse auf dem topologischen Raum X sind*

$$\psi(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \to C(X, X), \quad t \mapsto \psi(t, \cdot)$$

Homomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der Homöomorphismen von X.

Umgekehrt induzieren Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Homöomorphismen von X, die als Abbildungen $\psi : \mathbb{R} \times X \to X$ stetig sind, globale Flüsse.

(ii) Für vollständige Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit sind $t \mapsto \psi_F(t, \cdot)$ Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der r mal stetig differenzierbaren Homöomorphismen von X.

Umgekehrt definieren Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{R}$ in die Homöomorphismen von X, die als Abbildungen $\psi : \mathbb{R} \times X \to X$ zusammen mit $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ r mal stetig differenzierbar sind, vollständige Vektorfelder $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ mit $\psi = \psi_F$.

Beweis: (i) Offenbar ist $W = \mathbb{R} \times X$ dazu äquivalent, dass $V_t = X$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dann besagt die Bedingung (ii) des Flusses genau, dass $t \mapsto \psi(t, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Also folgt die Aussage aus dem Lemma 2.9.
(ii) folgt aus (i) und und Satz 2.10. **q.e.d.**

2.3 Die Lie–Ableitung

Definition 2.17. *Sei $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten X und Y und $F \in \mathrm{Vec}^r(Y)$ ein Vektorfeld auf Y. Dann definiert*

$$T(\Phi^{-1}) \circ F \circ \Phi : X \to TX$$

ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld von X. Dasselbe gilt auch, wenn Φ ein Homöomorphismus ist, so dass Φ und Φ^{-1} $(r+1)$ mal stetig differenzierbar sind.

Im letzten Abschnitt wurden aus Vektorfeldern $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ Homöomorphismen von V_t nach V_{-t} konstruiert. Wegen Korollar 2.12 gibt es für jedes $x \in X$ ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Mengen V_t und V_{-t} offene Umgebungen von x sind. Dann sind für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Abbildungen $\psi_F(t, \cdot) : x \mapsto \psi_F(t, x)$ stetig differenzierbare Homöomorphismen von offenen Umgebungen von x auf offene Umgebungen von x.

Definition 2.18. *Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ zwei Vektorfelder auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit X. Sei ψ_F der entsprechende Fluss des Vektorfeldes F. Wir definieren die Lie–Ableitung des Vektorfeldes E nach dem Vektorfeld F an der Stelle x:*

$$(\theta_F\, E)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\psi_F(t,x)}\big(\psi_F(-t, \cdot)\big)\,\big(E\big(\psi_F(t,x)\big)\big)$$

Dabei ist zu beachten, dass $E\big(\psi_F(t,x)\big)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ in $T_{\psi_F(t,x)}X$ liegt und $T_{\psi_F(t,x)}\big(\psi_F(-t, \cdot)\big)$ den Raum $T_{\psi_F(t,x)}X$ nach $T_{\psi_F(-t,\psi_F(t,x))}X = T_xX$ abbildet. Deshalb liegen die Werte von $T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot)) \circ E(\psi_F(t,x))$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ in dem normierten Vektorraum T_xX, so dass die Ableitung wohldefiniert ist, und ein Element von T_xX ist. Dadurch wird $\theta_F\, E$ zu einem stetigen Vektorfeld auf X.

Satz 2.19. *Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X gilt:*

$$\theta_F\, E = [F, E] \quad \textit{für} \quad E, F \in \mathrm{Vec}^1(X).$$

Beweis: Sei $\Phi : Y \to X$ ein Homöomorphismus und Φ^{-1} differenzierbar. Dann sind

$$\Phi^* : C(X, \mathbb{R}) \to C(Y, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f \circ \Phi, \quad \left(\Phi^{-1}\right)^* : C(Y, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R}), \qquad g \mapsto g \circ \Phi^{-1}$$

zueinander inverse Algebrahomomorphismen. Sei $x : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ mit $x(0) = \Phi(y)$ und $y \in Y$ in der Äquivalenzklasse von $E(\Phi(y)) \in T_{\Phi(y)}X$. Dann gilt für $g \in C^1(Y, \mathbb{R})$

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g\big((\Phi^{-1} \circ x)(t)\big) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(g \circ \Phi^{-1}\big)(x(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(\Phi^{-1}\big)^*(g)(x(t))$$

Mit der Definition 1.35 folgt für die entsprechenden Derivationen (vergleiche Satz 1.40)

$$\theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi}(g)(y) = \theta_E\left(\big(\Phi^{-1}\big)^*(g)\right)\big(\Phi(y)\big) \quad \text{und} \quad \theta_{T(\Phi^{-1})\circ E\circ\Phi} = \Phi^* \circ \theta_E \circ \big(\Phi^{-1}\big)^*,$$

weil das für alle $y \in Y$ und alle $g \in C^1(Y, \mathbb{R})$ gilt. Die Definitionsbereiche V_t der lokalen von $F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ induzierten stetig differenzierbaren Homöomorphismen $\psi_F(t, \cdot) : V_t \to V_{-t}$ aus Korollar 2.12 enthalten ein festes $x \in X$ für hinreichend kleine $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Wegen Satz 2.2 genügt es für $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ und $x \in X$ folgendes zu zeigen:

$$\theta_{\theta_F E}(f)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \theta_E\left(\big(\psi_F(-t, \cdot)\big)^*(f)\right)\big(\psi_F(t, x)\big) = \theta_{[F,E]}(f)(x).$$

Lemma 2.20. *Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $F \in \mathrm{Vec}^r(X)$ ein r mal stetig differenzierbares Vektorfeld auf X und $\psi_F : W_F \to X$ der entsprechende Fluss. Dann ist $f \circ \psi_F$ für jede $(r + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion $f \in C^{r+1}(X, \mathbb{R})$ auf W_F r mal stetig differenzierbar. Die partielle Ableitung nach t bei $t = 0$*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_F^*(t, \cdot)(f) : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial(f \circ \psi_F)}{\partial t}(0, x),$$

heißt Lie–Ableitung von f nach F und ist gleich $\theta_F(f)$ und liegt in $C^r(X, \mathbb{R})$.

Beweis: Der Fluss $\psi_F : W_F \to X$ ist dadurch definiert, dass $t \mapsto \psi_F(t, x)$ für alle $x \in X$ die maximale Integralkurve aus Satz 2.7 von dem Vektorfeld F durch den Punkt x ist. Dann ist wegen der Kettenregel $\frac{\partial(f\circ\psi_F)}{\partial t}(0, x)$ gleich der Richtungsableitung von f an der Stelle $x \in X$ in Richtung $F(x)$, und wegen Satz 1.40 gleich $\theta_F(f)(x)$. **q.e.d.**

Abschluss des Beweises von Satz 2.19: Weil θ_E linear ist folgt aus dem Lemma:

$$\begin{aligned} \theta_{\theta_F E}(f) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \theta_E(f \circ \psi_F(-t, \cdot)) \circ \psi_F(t, \cdot) = \\ &= \theta_E\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f \circ \psi_F(-t, \cdot)\right) \circ \psi_F(0, \cdot) + \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \theta_E(f \circ \psi_F(0, \cdot)) \circ \psi_F(t, \cdot) \\ &= \theta_E \circ \theta_{-F}(f) + \theta_F \circ \theta_E(f) = [\theta_F, \theta_E](f) = \theta_{[F,E]}(f). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\quad \theta_{\theta_F E} = \theta_{[F,E]} \quad$ und damit auch $\quad \theta_F E = [F, E]$. **q.e.d.**

Korollar 2.21. *Für zwei Vektorfelder $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist folgendes äquivalent:*

(i) *Die Vektorfelder E und F kommutieren, d.h. $[E, F] = 0 = [\theta_E, \theta_F]$.*

(ii) *Für alle $x \in X$ und $s, t \in \mathbb{R}$ mit $(t, x) \in W_E, (s, x) \in W_F, (t, \psi_F(s, x)) \in W_E$ und $(s, \psi_E(t, x)) \in W_F$ gilt* $\psi_E(t, \psi_F(s, x)) = \psi_F(s, \psi_E(t, x))$.

(iii) $\theta_F\, E = 0$

(iv) $\theta_E\, F = 0$

(v) *Für alle $(t, x) \in W_F$ gilt $E(x) = T_{\psi_F(t,x)}(\psi_F(-t, \cdot))E(\psi_F(t, x))$*

(vi) *Für alle $(t, x) \in W_E$ gilt $F(x) = T_{\psi_E(t,x)}(\psi_E(-t, \cdot))F(\psi_E(t, x))$*

Beweis: Wegen der Bedingung (ii) an den lokalen Fluss ψ_F folgt aus (iii)

$$\frac{d}{dt}T(\psi_F(-t, \cdot)) \circ E \circ \psi_F(t, \cdot) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\psi_F(-(t+s), \cdot)) \circ E \circ \psi_F(t+s, \cdot) =$$
$$= T(\psi_F(-t, \cdot)) \circ \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} T(\psi_F(-s, \cdot)) \circ E \circ \psi_F(s, \cdot) \right) \circ \psi_F(t, \cdot) = 0.$$

Also ist (iii) zu (v) äquivalent und analogerweise (iv) zu (vi). Wenn folgendes

$$E = T(\psi_F(-t, \cdot)) \circ E \circ \psi_F(t, \cdot) \text{ bzw.} \qquad F = T(\psi_E(-t, \cdot)) \circ F \circ \psi_E(t, \cdot)$$

gilt, dann sind auch die entsprechenden lokalen Flüsse gleich. Also gilt lokal

$$\psi_E(s, \cdot) = \psi_F(-t, \cdot) \circ \psi_E(s, \cdot) \circ \psi_F(t, \cdot) \qquad \psi_F(s, \cdot) = \psi_E(-t, \cdot) \circ \psi_F(s, \cdot) \circ \psi_E(t, \cdot)$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar beide äquivalent dazu, dass $\psi_E(s, \cdot)$ und $\psi_F(t, \cdot)$ lokal kommutieren, und damit auch zu (ii).

Wegen Satz 2.19 sind sowohl (iii) als auch (iv) äquivalent zu (i). Also sind sowohl (iii) und (v) als auch (iv) und (vi) äquivalent zu (i) und (ii). **q.e.d.**

Dieses Korollar besagt, dass die lokalen Homöomorphismen von zwei Vektorfeldern $E, F \in \mathrm{Vec}^1(X)$ genau dann miteinander kommutieren, wenn auch θ_E und θ_F miteinander kommutieren. Wenn die Vektorfelder vollständig sind, definieren sie zusammen eine zweidimensionale abelsche Untergruppe der Homöomorphismengruppe, bzw. der Diffeomorphismengruppe, wenn E und F glatt sind. Die Lie-Ableitung werden wir später auch auf Differentialformen definieren. Lemma 2.20 bedeutet dann, dass sie auf Funktionen mit der Richtungsableitung θ übereinstimmt.

2.4 Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt betrachten wir das Tangentialbündel TX einer differenzierbare Untermannigfaltigkeiten X von einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y als Untervektorraumbündel der Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbüdels TY von Y auf X. In einem zweiten Schritt charakterisieren wir solche Untervektorraumbündel des Tangentialbündels TY, die die Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit sind.

Satz 2.22. *Sei X eine Untermannigfaltigkeit der differenzierbaren Mannigfaltigkeit Y. Dann gilt folgendes:*

(i) Die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X ist ein Vektorraumbündel über X.

(ii) Das Tangentialbündel TX von X ist ein Untervektorraumbündel von $TY|_X$, d.h. TX ist eine Untermannigfaltigkeit von $TY|_X$ und über allen $x \in X$ ist die Faser T_xX von TX ein Untervektorraum von der Faser T_xY von TY.

(iii) Jeder r–mal (stetig) differenzierbare Schnitt von $TY|_X$ auf einer offenen Menge U von X ist die Einschränkung eines r–mal (stetig) differenzierbaren Schnittes von TY auf einer offenen Menge V von Y auf die Schnittmenge $U = V \cap X$.

(iv) Seien $E, F \in \mathrm{Vec}^1(U)$ Vektorfelder auf einer in Y offenen Umgebung U von X mit $E|_X, F|_X \in \mathrm{Vec}^1(X)$. Dann gilt $[F, E]|_X = [F|_X, E|_X]$.

(v) Die Einschränkung $F|_X$ eines Vektorfeldes $F \in \mathrm{Vec}^1(Y)$ liegt genau dann in $TX \subset TY|_X$, wenn der entsprechende Fluss ψ_F die Untermannigfaltigkeit $(\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ von W_F nach X abbildet. Dann gilt $W_{F|_X} = (\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ und $\psi_{F|_X} = \psi_F|_{W_{F|_X}}$.

Beweis: (i) Sei $f : X \hookrightarrow Y$ die Einbettung der Untermannigfaltigkeit X in Y. Dann ist die Einschränkung $TY|_X$ des Tangentialbündels von Y auf die Untermannigfaltigkeit X das inverse Bild $f^*(TY)$ von TY unter f, also ein Vektorraumbündel auf X.
(ii) Für Jeden Untervektorraum $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ ist das Tangentialbündel $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ein Untervektorraumbündel von $T\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Weil wegen Satz 1.45 jede Untermannigfaltigkeit X in einer Umgebung U jedes Punktes $x \in X$ bezüglich einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ von Y gleich dem Urbild $X \cap U = \phi^{-1}[\mathbb{R}^n]$ eines solchen Unterraumes $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ ist, ist dann TX ein Untervektorraumbündel von $TY|_X$ ist.
(iii) Wir wählen eine offene Überdeckung von der Untermannigfaltigkeit $X \subset Y$ die aus Definitionsbereichen von verträglichen Karten von Y besteht, wie sie im Satz 1.45 beschrieben sind. Jeder Punkt $x \in X$ ist dann auch in dem offenen Definitionsbreich einer Karte $\phi : V \to \mathbb{R}^m$ von Y enthalten, so dass $\phi[V]$ das kartesische Produkt $\phi[U] \times W$

von dem Bild der offenen Teilmenge $U = V \cap X$ von X mit einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ ist. Weil die Verkettung einer r–mal (stetig) differenzierbare Funktion auf $\phi[U]$ mit der Projektion $p_1 : \phi[U] \times W \to \phi[U]$ eine r–mal (stetig) differenzierbare Funktion auf $\phi[V]$ ist, gilt die Aussage für alle solchen Mengen U. Indem wir eine beliebige offene Teilmenge U durch solche offene Mengen U überdecken folgt mit Hilfe einer entsprechenden Zerlegung der Eins die Aussage für beliebige U.
(v) Sei $f : V \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^m$, dessen Einschränkung $f|_{V\cap\mathbb{R}^n}$ auf die Schnittmenge $V \cap \mathbb{R}^n$ von V mit einem Untervektorraum $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$ eine Abbildung mit Werten in diesem Unterraum $\mathbb{R}^n$ ist. Dann ist $f_{V\cap\mathbb{R}^n}$ eine stetig differenzierbares Vektorfeld auf $V \cap \mathbb{R}^n$. Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf ist dann jede Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t)) \text{ mit } x(0) = y$$

eine Abbildung nach $V \cap \mathbb{R}^n$, wenn y in $V \cap \mathbb{R}^n$ liegt. Wegen Satz 1.45 liegen dann die ganzen Integralkruven von Vektorfeldern $F \in \mathrm{Vec}^1(Y)$, die X nach $TX \subset TY|_X$ abbilden, mit ihren Startpunkten in X. Insbesondere lassen die entsprechenden lokalen Flüsse die Untermannigfaltigkeit X invariant, und $\psi_{F|_X}$ ist die Einschränkung des Flusses ψ_F auf $(\mathbb{R} \times X) \cap W$, d.h. $W_{F|_X} = (\mathbb{R} \times X) \cap W_F$ und $\psi_{F|_X} = \psi_F|_{W_{F|_X}}$.

Wenn umgekehrt die lokalen Flüsse ψ_F die Untermannigfaltigkeit X invariant lassen, dann definieren sie einen lokalen Fluss auf X und wegen Satz 2.10 ein Vektorfeld auf X. Dieses Vektorfeld muss wegen der im Beweis von Satz 2.10 benutzten Formel für das Vektorfeld als partielle Ableitung des Flusses, mit der Einschränkung des entsprechenden Vektorfeldes von Y auf die Untermannigfaltigkeit X übereinstimmen.
(iv) Aus (v) folgt, für alle $x \in X$ und hinreichend kleine t

$$T(\psi_F(-t, \cdot)) \circ E \circ \psi_F(t, x) = T(\psi_{F|_X}(-t, \cdot)) \circ E|_X \circ \psi_{F|_X}(t, x).$$

Dann folgt (iv) aus Satz 2.19. **q.e.d.**

Umgekehrt stellt sich die Frage, wann ein Untervektorraumbündel (E, Y, π) von dem Tangentialbündel (TY, Y, π), das Tangentialbündel einer Untermannigfaltigkeit ist.

Satz 2.23 (Frobenius)**.** *Ein Untervektorraumbündel (E, Y, π) der Dimension $1 \leq d$ von (TY, Y, π) besitzt genau dann einen Atlas von Karten $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$T(\phi)[E \cap \pi^{-1}[U]] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{d+1} = \ldots = x_n = 0\} \times \phi[U] \subset T\phi[U],$$

wenn für alle Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(Y)$ von E auch $[F, G]$ ein Schnitt von E ist.

Beweis: Wegen Satz 1.45 ist für jedes y_0 im Definitionsbreich einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$

$$X = \{y \in U \mid \phi_{d+1}(y) = \phi_{d+1}(y_0), \ldots, \phi_n(y) = \phi_n(y_0)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit. Wenn $T(\phi)[E \cap \pi^{-1}[U]]$ von der angegeben Gestalt ist, dann ist $E|_X = TX$. Wegen Satz 2.22 (iv) ist dann $[F, G]$ für Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(Y)$ von E zuerst auf X ein Schnitt von TX, und dann auf Y eine Schnitt von E, weil alle $y_0 \in Y$ im Definitionsbreich einer solchen Karte liegen.

Es genügt die Umkehrung auf einer offenen Umgebung U eines Punktes $y_0 \in Y$ zu zeigen. Lokal ist E trivial. Wir können also vorraussetzen, dass linear unabhängige Vektorfelder $F_1, \ldots, F_d \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ existieren, deren Werte auf U die Fasern von E aufspannen. Das Vektorfeld F_1 induziert einen lokalen Fluss ψ_{F_1}. Wir wählen eine Karte $\tilde{\psi} : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gegebenfalls verkleinerten Umgebung U von y_0 mit $\tilde{\psi}(y_0) = 0$ und $\theta_{F_1}(\tilde{\psi})(y_0) \neq 0$. Dann hat hat Jacobimatrix der Abbildung $x \mapsto \tilde{\psi}(\psi_{F_1}(x_1, \tilde{\psi}^{-1}(0, x_2, \ldots, x_n))$ bei $x = 0$ folgende Gestalt und Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \theta_{F_1}(\tilde{\psi}_1)(y_0) & 0 \\ \cdot & \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{pmatrix} = \theta_{F_1}(\tilde{\psi}_1)(y_0) \neq 0.$$

Also definiert $\psi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \psi_{F_1}(x_1, \tilde{\psi}^{-1}(0, x_2, \ldots, x_n))$ wegen dem Satz der inversen Funktion die Umkehrabbildung einer Karte $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gebenenfalls verkleinerten Umgebung U von y_0. Aufgrund der Konstruktion parametrisiert ψ_1 die Integralkurven von F_1, und längs dieser Integralkruven sind die Koordinaten $\psi_2, \ldots, \psi_n$ konstant. Also hat F_1 bezüglich der Karte ψ die Gestalt $\frac{\partial}{\partial \psi_1}$. Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion in d. Für $d = 1$ hat die Karte $\phi = \psi$ diese Eigneschaften.

Wir nehmen jetzt an, dass die Umkehrung für alle Untervektorraumbündel der Dimension kleiner als $d \in \mathbb{N}$ gilt. Für jeden Schnitt $F \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E, ist $\tilde{F} = F - \theta_F(\psi_1) F_1$ ein Schnitt von E mit $\theta_{\tilde{F}}(\psi_1) = 0$. Deshalb induziert $\tilde{F}$ auch ein Vektorfeld an die Untermannigfaltigkeit $\tilde{U} = \{y \in U \mid \psi_1(y) = \psi_1(y_0) = 0\}$ von U. Wegen Satz 2.22 (iv) induziert dann $[\tilde{F}, \tilde{G}] \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ für zwei Schnitte $F, G \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E ein Vektorfeld längs der Untermannigfaltigkeit $\tilde{U}$. Außerdem ist $[\tilde{F}, \tilde{G}]$ wegen

$$\begin{aligned} \theta_{[\tilde{F},\tilde{G}]} &= \left[\theta_{F-\theta_F(\psi_1)F_1}, \theta_{G-\theta_G(\psi_1)F_1}\right] = [\theta_F - \theta_F(\psi_1)\,\theta_{F_1}, \theta_G - \theta_G(\psi_1)\,\theta_{F_1}] \\ &= \theta_{[F,G]-\theta_F(\psi_1)[F_1,G]+\theta_G(\theta_F(\psi_1))F_1-\theta_G(\psi_1)[F,F_1]-\theta_F(\theta_G(\psi_1))F_1+\theta_{F_1}(\theta_G(\psi_1))F-\theta_{F_1}(\theta_F(\psi_1))G} \end{aligned}$$

auch ein Schnitt von E. Für alle Schnitte $F \in \mathrm{Vec}^\infty(U)$ von E liegen die Werte von $\tilde{F}$ auf $\tilde{U}$ in einem $d-1$–dimensionalen Untervektorraumbündel $(\tilde{E}, \tilde{U}, \pi)$ von der Einschränkung von (E, U, π) auf $\tilde{U}$. Offenbar spannen $\tilde{F}_2, \ldots, \tilde{F}_d$ die Fasern von $\tilde{E}$ auf $\tilde{U}$ auf. Wegen der Induktionsvorraussetzung gibt es eine Karte $\tilde{\phi} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-1}$ mit

$$T(\tilde{\phi})(\tilde{E} \cap \pi^{-1}[U]) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_d = \ldots = x_{n-1} = 0\} \times \tilde{\phi}[\tilde{U}] \subset T\mathbb{R}^{n-1}$$

auf einer gegebenfalls verkleinerten offenen Umgebung $\tilde{U}$ von y_0 in der Untermannigfaltigkeit. Insbesondere verschwinden alle Schnitte von $\tilde{E}$ auf $\tilde{\phi}_d, \ldots, \tilde{\phi}_{n-1}$. Die Umkehrabbildung $\tilde{\phi}^{-1}$ können wir wieder mit dem Fluss ψ_{F_1} zu der Umkehrabbildung

$\phi^{-1}(x_1,\ldots,x_n) = \psi_{F_1}(x_1,\tilde{\phi}^{-1}(x_2,\ldots,x_n))$ einer Karte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ auf einer gegebenenfalls verkleinerten offenen Umgebung U von y_0 fortsetzten.

Es bleibt zu zeigen, dass auf dem gesamten Definitionsbreich U von ϕ die Derivationen $\theta_{F_1},\ldots,\theta_{F_d}$ auf den Funktionen $\phi_{d+1},\ldots,\phi_n$ verschwinden. Das Vektorfeld F_1 hat wieder die Gestalt $\frac{\partial}{\partial\phi_1}$. Also verschwindet $\theta_{F_1}(\phi_2) = 0,\ldots,\theta_{F_1}(\phi_n) = 0$. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial\phi_1}\theta_{F_i}(\phi_j) = \theta_{F_1}(\theta_{F_i}(\phi_j)) = \theta_{[F_1,F_i]}(\phi_j) \quad \text{für} \quad i = 2,\ldots,d \text{ und } j = d+1,\ldots,n.$$

Aus der Voraussetzung an die Schnitte von E folgt $[F_1,F_i] = c_{i1}F_1+\ldots+c_{id}F_d$ mit glatten Funktionen c_{ik}. Also erfüllen diese Funktionen $\theta_{F_i}(\phi_j)$ längs der Integralkurven von F_1 auf denen $\phi_2,\ldots,\phi_n$ konstant sind, ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit glatten Koeffizienten c_{ik}. Für $i = 2,\ldots,d$ und $j = d+1,\ldots,n$ verschwinden mit $\theta_{\tilde{F}_i}(\tilde{\phi}_{j-1})$ auch $\theta_{F_i}(\phi_j)$ auf $\tilde{U}$. Wegen dem Satz von Picard–Lindelöf ist $\theta_{F_i}(\phi_j) = 0$ für diese i und j die eindeutige Lösung dieses Differentialgleichungssytems auf allen Integralkurven von F_1, die $\tilde{U}$ schneiden. Aufgrund der Konstruktion erfüllt dann ϕ die Bedingung im Satz auf ganz U. **q.e.d.**

Satz 2.24. *Sei (E,Y,π) ein Untervektorraumbündel von (TY,Y,π), dass die Bedingungen aus Satz 2.23 erfüllt. Dann gibt es für jedes $y \in Y$ eine injektive Immersion $f : X \to Y$ von einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X mit $T(f)[TX] = E|_{f[X]}$ und $y \in f[X]$. Sie kann in dem Sinne maximal gewählt werden, dass jedes andere f die Einschränkung auf eine offene zusammenhängende Umgebung von $f^{-1}[\{y\}]$ in X ist.*

Beweis: Der Beweis von Lemma 1.30 zeigt auch, dass es einen abzählbaren Atlas $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Karten $\phi_k : U_k \to B(0,r_k)$ auf offene Bälle gibt, die die erste Bedingung im Satz 2.23 erfüllen, so dass X durch $O_k = \phi_k^{-1}[B(0,\frac{r_k}{2})]$ X überdeckt wird und sich jeweils nur endlich viele U_k's schneiden. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $x \in O_k$ gibt es dann genau eine maximale zusammenhängende Untermannigfaltigkeit V von O_k mit $x \in V$ und $TV = E|_V$. Sei $\mathcal{V}$ die Menge aller solcher Untermannigfaltigkeiten. Neben der Topologie τ von Y als differenzierbare Mannigfaltigkeit definieren wir eine feinere Topologie $\tilde{\tau}$. Bezüglich $\tilde{\tau}$ heißt eine Teilmenge $O \subset Y$ offen, wenn für alle $V \in \mathcal{V}$ die Urbilder von O unter den Inklusionen $V \hookrightarrow Y$ offen in V sind. Für $V \in \mathcal{V}$ sind die Schnittmengen $V \cap V'$ mit Untermannigfaltigkeiten $V' \in \mathcal{V}$ von O_k offen und die Schnittmengen der Abschlüsse $\bar{V} \cap \bar{V}'$ und $\bar{V} \cap \bar{V}''$ mit zwei verschiedenen Untermannigfaltigkeiten $V' \neq V'' \in \mathcal{V}$ von O_k disjunkt. Weil sich nur endlich viele U_k's schneiden, schneidet jedes $V \in \mathcal{V}$ höchstens endlich viele $V' \in \mathcal{V}$. Dann ist jedes $V \in \mathcal{V}$ bezüglich $\tilde{\tau}$ offen und die Einschränkung $\phi_k|_V$ der Karte mit $V \subset O_k$ eine Karte von dem lokal zusammenhängenden topologischen Raum $(Y,\tilde{\tau})$. Also sind die Zusammenhangskomponenten von $(Y,\tilde{\tau})$ offen und die Vereinigungen über Teilmengen von $\mathcal{V}$, die die Äquivalenzklassen folgender Relation bilden: Zwei $V,V' \in \mathcal{V}$ erfüllen die Relation, wenn es endlich viele $V = V_1, \ldots, V_L = V'$ in $\mathcal{V}$ gibt mit $V_l \cap V_{l+1} \neq \emptyset$ für alle $l = 1, \ldots, L-1$. Also gibt es höchstens abzählbar viele Untermannigfaltigkeiten $V = V_1, \ldots, V_L \in \mathcal{V}$ mit $V_l \cap V_{l+1} \neq \emptyset$ für alle $l = 1, \ldots, L-1$. Damit sind die Äquivalenzklassen höchstens abzählbar, und die Zusammenhangskomponenten von $(Y, \tilde{\tau})$ Mannigfaltigkeiten.

Das Bild einer injektiven Immersion $f : X \to Y$ mit $T(f)[TX] = E|_{f[X]}$ ist eine offene Teilmenge von $(Y, \tilde{\tau})$. Wenn X zusammenhängend ist, ist es eine offene Teilmenge der entsprechenden Zusammenhangskomponente von $(Y, \tilde{\tau})$. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.25. *Finde eine Beispiel für ein Linienunterbündel E von TY auf einer kompakten Mannigfaltigkeit Y, so dass die injektiven Immersionen aus Satz 2.24 keine Einbettungen sind (Tip: definiere E durch ein glattes Vektorfeld ohne Nullstellen).*

2.5 Zusammenfassung

Wir haben jetzt drei äquivalente Beschreibungen von Vektorfeldern kennengelernt:

Schnitte des Tangentialbündels: Nach unser Definition sind Vektorfelder Schnitte des Tangentialbündels.

Derivationen: Wegen Satz 2.2 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und Derivationen von der Algebra der differenzierbaren Funktionen. Dadurch bilden die Vektorfelder eine Lie–Algebra.

Lokale Flüsse: Wegen Satz 2.10 gibt es eine Eins–zu–Eins Beziehung zwischen Vektorfeldern und lokalen Flüssen auf der Mannigfaltigkeit. Dadurch bilden die Vektorfelder so etwas wie die Lie–Algebra der lokalen Diffeomorphismengrupppe.

Die lokalen Flüsse, die von Vektorfeldern erzeugt werden, sind eindimensionale Untergruppen der lokalen Diffeomorphismen. Durch diese lokalen Diffeomorphismen können wir alle möglichen geometrischen Objekte auf der Mannigfaltigkeit transformieren. Die entsprechenden Ableitungen werden dann Lie–Ableitung genannt. Lemma 2.20 beschreibt dann die Lie–Ableitung von Funktionen, und Satz 2.19 die Lie–Ableitung von Vektorfeldern. Im nächsten Kapitel werden wir auch die Lie–Ableitung von anderen Tensorfeldern kennenlernen.