Zeit-stetige dynamische Systeme

Phillip Reiss

03. November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften zeit-stetiger dynamischer Systeme **2**
2.1 (Halb-)Flüsse 2
2.2 Autonome Differenzialgleichungen 2
2.3 Invariante Mengen 5
2.4 Orbits 6

3 Topologische dynamische Systeme in stetiger Zeit **7**
3.1 Limesmengen 7
3.2 Eigenschaften der Limesmengen 9

1 Einleitung

Die folgende Arbeit beruht auf dem Buch „Dynamical Systems - An Introduction“, Kapitel 1-3, insbesondere Kapitel 3.2.2, von L. Barreira und C. Valls, welches 2013 beim Springer Verlag London erschienen ist.
Im zweiten Kapitel werden grundlegende Definitionen eingeführt. Mit Proposition 1 zeigen wir, dass eindeutige Lösungen von autonomen (gewöhnlichen) Differenzialgleichungen Flüsse generieren. Diese untersuchen wir, auch mit Hilfe von Beispielen, im weiteren Verlauf des Kapitels tiefer und führen die Konstrukte invarianter Mengen und (Halb-)Orbits ein.
Das dritte Kapitel beschäftigt sich im speziellen mit topologischen dynamischen Systemen, also Systemen, bei welchen der (Halb-)Fluss stetig ist. Durch die vorausgesetzte Stetigkeit können wir nun positive und negative Limesmengen der Lösungen definieren und abschließend Eigenschaften dieser Limesmengen herleiten.

2 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften zeit-stetiger dynamischer Systeme

In diesem Kapitel werden grundlegende Konstrukte definiert und mit Beispielen verdeutlicht, welche für die Betrachtung topologischer dynamischer Systeme in stetiger Zeit erforderlich sind. Dabei wird ein starker Fokus auf (Halb-)Flüsse und deren Entwicklung aus autonomen gewöhnlichen Differenzialgleichungen gelegt. Darüber hinaus werden die zugehörigen Orbit-Mengen eingeführt, um im nächstem Kapitel deren Grenzwertverhalten zu analysieren.

2.1 (Halb-)Flüsse

Im Gegensatz zu diskreten dynamischen Systemen, in welchen eine einfache Abbildung bereits ein dynamisches System ist, benötigen wir in stetiger Zeit sogenannte Familien von Abbildungen, auch (Halb-)Flüsse genannt:

Definition 1. *Eine Familie von Abbildungen $\varphi_t : X \to X$ für $t \geq 0$, sodass $\varphi_0 = Id$ und $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, für alle $t, s \geq 0$, heißt* ***Halbfluss****.*

Eine Familie von Abbildungen $\varphi_t : X \to X$ für $t \in \mathbb{R}$, sodass $\varphi_0 = Id$ und $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, für alle $t, s \in \mathbb{R}$, heißt ***Fluss****.*

Bemerkung:

- Zu einer Familie von Abbildungen φ_t sagen wir auch *dynamisches System in stetiger Zeit*, falls es ein Fluss oder Halbfluss ist
- Falls φ_t ein Fluss ist, gilt $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 = \mathrm{Id}$

Betrachten wir im Folgenden ein Beispiel:

Geg.: Gegeben sei ein $y \in \mathbb{R}^n$ und wir betrachten die Abbildungen $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei:

$$\varphi_t(x) = x + yt, \; t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Z.z.:
- $\varphi_0 = \mathrm{Id}$
- $\varphi_{t+s}(x) = x + (t+s)y = (x + sy) + ty$
  $= \varphi_t(\varphi_s(x)) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x)$

$\Rightarrow$ Somit ist die Familie der Abbildungen φ_t ein Fluss

2.2 Autonome Differenzialgleichungen

In diesem Unterkapitel betrachten wir autonome (gewöhnliche) Differenzialgleichungen, wobei wir sehen werden, dass diese uns auf natürliche Weise zum Konzept des (Halb-)Flusses zurückbringen werden. Wir werden dabei zunächst allgemein definieren, was eine Differenzialgleichung ist und diese dann stückweise auf die Unterklasse der autonomen, gewöhnlichen Differenzialgleichungen herunter brechen:

Definition 2. *Eine Differenzialgleichung (DG) ist eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion von einer oder mehreren Variablen, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen.*

Bemerkungen:

- Es gibt eine Vielzahl an Klassen von Differenzialgleichungen: Beispielsweise partielle DG, stochastische DG, etc.
  In dieser Arbeit werden wir uns jedoch primär auf sogenannte gewöhnliche DG beschränken
- Eine DG heißt *gewöhnlich*, wenn die gesuchte Funktion lediglich von einer Variablen abhängt, also $y^{(n)}(t) = f((y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t), t)$
- Dabei wird n der *Grad* einer Differenzialgleichung genannt
- Eine gewöhnliche Differenzialgleichung heißt *autonom*, falls sie zeit-invariant ist, also $y^{(n)}(t) = f((y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t))$, für alle t im Definitionsbereich gilt
- Ein *Anfangswertproblem (IVP)* ist ein Gleichungssystem von einer gewöhnlichen Differenzialgleichung und einer zusätzlichen Anfangsbedingung

Beispiel einer ODE:
Sei folgende autonome, gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung gegeben:

$$y' = y^2$$

Wir verwenden nun den Ansatz der *Trennung der Variablen* für $y' = f(y)$

- Im ersten Schritt finden wir die Nullstellen von $f(y)$, um die konstante Lösungen zu bestimmen:
  $y^2 = 0 \rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$
- Im zweiten Schritt setzten wir folgende Integrale gleich und lösen nach y auf: $\int \frac{1}{f(y)} dy = \int 1 dx$. Also:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx$$
$$-y^{-1} = x + c \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{(x+c)}$$

$\Rightarrow$ Abhängig von der Anfangsbedingung folgt die eindeutige Lösung der DG[1]

Mit der nun folgenden Propositionen, können wir eine natürliche Verbindung zwischen der (eindeutigen) Lösung von autonomen Differenzialgleichungen und (Halb-)Flüssen herstellen:

[1]Beachte: Diese Lösung ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert, da sie für $t \rightarrow -c$ gegen $\pm\infty$ geht. Somit determiniert die Lösung keinen Fluss nach nun folgender Proposition.

Proposition 1. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, sodass für ein gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}^n$, das IVP*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

eine eindeutige Lösung $x(t, x_0)$ hat, für alle beliebigen Startwerte x_0 und alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist die Familie von Abbildungen $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definiert für jedes $t \in \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$$

ein Fluss.

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$y(t) = x(t + s, x_0)$$

Nun:

- $y(0) = x(s, x_0)$
- $y'(t) = x'(t + s, x_0) = f(x(t + s, x_0)) = f(y(t))$, für $t \in \mathbb{R}$
- Somit ist y auch eine Lösung der Gleichung $x' = f(x)$
- Da IVP **eindeutige** Lösung nach Voraussetzung, folgt:

  $$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, x_0))$$

  Äquivalent können wir schreiben:

  $$x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0)) \tag{3}$$

  für $t, s \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
- Mit (3) folgt, dass $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$
- Zudem: $\varphi_0(x_0) = x(0, x_0) = x_0$ und somit $\varphi_0 = \mathrm{Id}$

□

Wir betrachten nun ein konkretes Beispiel einer autonomen Differenzialgleichung und den von dieser determinierten Fluss:
Sei folgende Differenzialgleichung gegeben:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Vorgehen:

- Falls $(x(t), y(t)$ nun eine Lösung obiger Gleichung ist, dann gilt:
$$(x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = -2xy + 2xy = 0$$
und somit existiert eine Konstante r, sodass $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$
- Nun können wir die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ in Polarkoordinaten schreiben:
  - $x(t) = r * \cos(\theta(t))$
  - $x(t) = r * \sin(\theta(t))$

  Wobei $\theta(t)$ eine differenzierbare Funktion ist. Nun folgt aus der Gleichung, dass:
$$x'(t) = r * -\sin(\theta(t)) * \theta'(t) = -r * \sin(\theta(t)) = -y(t) \Rightarrow \theta'(t) = 1$$
- Somit existiert eine Konstante c, sodass $\theta(t) = t + c$
- Dies können wir nun in $x(t)$ und $y(t)$ einsetzten und es folgt:
  - $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * \cos(c) \\ r * \sin(c) \end{pmatrix}$ und
  - $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r * \cos(t + c) \\ r * \sin(t + c) \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} r * (\cos(t) * \cos(c) - \sin(t) * \sin(c)) \\ r * (\sin(t) * \cos(c) + \cos(t) * \sin(c)) \end{pmatrix}$
  $= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} r * \cos(c) \\ r * \sin(c) \end{pmatrix}$
  $= R(t) * \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$
- Da zudem $R(0) = \mathrm{Id}$, folgt mit Proposition 1, dass die Familie von Abbildungen $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Fluss ist, mit
$$\varphi_t * \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = R(t) * \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

2.3 Invariante Mengen

In diesem Teilkapitel betrachten wir invariante Mengen, also Mengen in denen wir, egal wie weit wir in der Zeit voran (resp. zurück) gehen, stets bleiben. Das Konstrukt der invarianten Mengen wird im nächsten Kapitel erneut aufgegriffen, in welchem wir zeigen werden, dass Limesmengen invariant sind unter gewissen Voraussetzungen.

Definition 3. *Sei ein Fluss (Halbfluss) $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (bzw. $\Phi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$) von X gegeben; Eine Menge $A \subset X$ heißt Φ-**invariant**, falls*
$$\varphi_t^{-1} A = A,\ t \in \mathbb{R}\ (bzw.\ t \geq 0),$$
wobei $\varphi_t^{-1} A = \{x \in X : \varphi_t(x) \in A\}$, für ein $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen:

Im Falle eines Flusses ist $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ für $t \in \mathbb{R}$ und somit:
$A \subset X$ Φ-invariant $\iff \varphi_{-t}A = A \iff \varphi_t A = A$, für $t \in \mathbb{R}$

Vereinigungen und Schnitte von invarianten Mengen sind ebenfalls wieder invariante Mengen

Gegeben sei beispielsweise Differenzialgleichung :

$$\begin{cases} x' = 2y^3 \\ y' = -3x \end{cases} \tag{4}$$

Nun erfüllt jede Lösung $(x, y) = (x(t), y(t))$, dass

$$\begin{aligned} (3x^2 + y^4)' &= 6xx' + 4yy' \\ &= 12xy^3 - 12y^3x = 0 \end{aligned}$$

Somit ist also für jede Menge $I \subset \mathbb{R}^+$ die Vereinigung A, mit

$$A = \bigcup_{a \in I} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^4 = a\}$$

invariant bezüglich des von (4) determinierten Flusses.

2.4 Orbits

In diesem letzten Abschnitt von Kapitel 2 lernen wir die (Halb-)Orbit-Mengen für einen Punkt $x \in X$ kennen. Diese sind für uns insofern interessant, da die Limesmengen aus dem kommenden Kapitel, als Grenzwerte dieser (Halb-)Orbits aufgefasst werden können. Zudem werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit gewisse Anforderungen an die Halb-Orbits stellen (kompakte Abschlüsse), unter denen die Limesmengen gewisse Eigenschaften erfüllen. (Siehe Kapitel 3, Theorem 2 und 4)

Definition 4.

- *Für einen Halb-Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ von X, heißt die Menge*

$$\gamma^+(x) = \gamma_\Phi^+(x) = \{\varphi_t(x) : t \geq 0\}$$

*der **positive Halb-Orbit** von x.*

- *Für einen Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ von X, heißt die Menge*
  - $\gamma^-(x) = \gamma_\Phi^-(x) = \{\varphi_{-t}(x) : t \geq 0\}$ *der **negative Halb-Orbit** von x,*
  - $\gamma(x) = \gamma_\Phi(x) = \{\varphi_t(x) : t \in \mathbb{R}\}$ *der **Orbit** von x.*

3 Topologische dynamische Systeme in stetiger Zeit

3.1 Limesmengen

In diesem Kapitel werden wir zunächst definieren, was ein topologisches dynamisches System in stetiger Zeit ist und uns im Anschluss daran die Stetigkeit der Lösung nutzen, um die α- und die ω-Limesmenge zu definieren.
Der zweite Teil des Kapitels wird sich mit den Eigenschaften dieser Limesmengen, unter gegebenen Voraussetzungen, auseinander setzen.

Definition 5. *Jeder Fluss (bzw. Halb-Fluss) $\varphi_t : X \to X$, sodass die Abbildung $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$* ***stetig ist in*** *$\mathbb{R} \times X$* ***(bzw. in*** *$\mathbb{R}_0^+ \times X$), heißt topologischer Fluss (bzw. Halb-Fluss).*
Jeder topologische (Halb-)Fluss wird auch topologisches dynamisches System in stetiger Zeit genannt.

Bemerkung: Die Stetigkeits-Annahme impliziert insbesondere, dass jede Abbildung $\varphi_t : X \to X$ stetig ist; Somit ist diese Abbildung im Falle eines Flusses ein Homöomorphismus.

Es folgt ein Beispiel eines topologischen Flusses:

Gegeben: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Funktion mit $f(0) = 0$.

Nun:

- $\exists L > 0$, sodass $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$, für $x, y \in \mathbb{R}^n$
- Betrachten wir nun das IVP (2), welches eine eindeutige Lösung $x(t, x_0)$ hat, für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- Aus $x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(x(s, x_0))ds$ folgt nun mit L-Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0)\| &\leq \|x_0\| + \left|\int_0^t \|f(x(s, x_0))\|\, ds\right| \\ &\leq \|x_0\| + L\, \left|\int_0^t \|x(s, x_0)\|\, ds\right| \end{aligned}$$

- Mit *Gronwalls Lemma* erhalten wir die Abschätzung:

  $$\|x(t, x_0)\| \leq \|x_0\| * e^{L|t|}$$

  wobei t im Lösungsbereich der Differenzialgleichung ist.
- Dies impliziert, dass die Lösung $\varphi_t(x_0) = x(t, x_0)$ wohldefiniert ist für $t \in \mathbb{R}$

- Es folgt mit stetiger Abhängigkeit der Lösung einer ODE von ihren Anfangswerten [2], dass der Fluss $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein topologisch dynamisches System ist.

Definition 6. *Sei ein Halb-Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ von X gegeben. Die ω-**Limesmenge** eines Punktes $x \in X$ ist nun definiert als:*

$$\omega(x) = \omega_\Phi(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi_s(x) : s > t\}}$$

*Sei ein Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von X gegeben. Die α-**Limesmenge** eines Punktes $x \in X$ ist nun definiert als:*

$$\alpha(x) = \alpha_\Phi(x) = \bigcap_{t<0} \overline{\{\varphi_s(x) : s < t\}}$$

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel, um das Verständnis von Limesmengen zu vertiefen:

Gegeben: Sei dazu folgende Differenzialgleichung in Polarkoordinaten gegeben:

$$\begin{cases} r' = r * (r-1) * (r-2) \\ \theta' = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Nun:

- Wir sehen zunächst, dass $r' > 0$ für $r \in (0,1) \cup (2, +\infty)$ und dass $r' < 0$ für $r \in (1,2)$.
- Betrachten wir nun die Menge

  $$C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

  für $r \geq 0$.

- Für $p \in C_r$ haben wir nun folgende Fallunterscheidung[3]:

  $$\begin{aligned} &\alpha(p) = \{(0,0)\}, \omega(p) = \{(0,0)\} \; f\ddot{u}r \; r = 0 \\ &\alpha(p) = \{(0,0)\}, \omega(p) = C_1 \; f\ddot{u}r \; r \in (0,1) \\ &\alpha(p) = C_1, \omega(p) = C_1 \; f\ddot{u}r \; r = 1 \\ &\alpha(p) = C_2, \omega(p) = C_1 \; f\ddot{u}r \; r \in (0,1) \\ &\alpha(p) = C_2, \omega(p) = C_2 \; f\ddot{u}r \; r = 2 \\ &\alpha(p) = C_2, \omega(p) = \emptyset \; f\ddot{u}r \; r > 2 \end{aligned}$$

[2] **Theorem:** Wenn $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine L-stetige Funktion auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, und zudem $\varphi(\bullet, x_0)$ eine Lösung des IVP (2) ist, dann ist die Funktion $(t,x) \mapsto \varphi(t,x)$ stetig.

[3] Werte für $r \in (1,2)$ sind inkorrekt in Primärquelle

- Zur Verdeutlichung der Limesmengen hier das Phasenportrait der Differenzialgleichung:

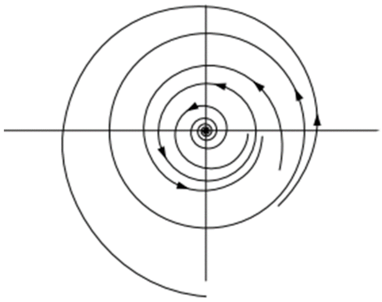

Abbildung 1: Phasenportrait von (5):

3.2 Eigenschaften der Limesmengen

Da wir nun die Idee der Limesmengen in stetiger Zeit kennen, betrachten wir im folgenden Unterkapitel die wichtigsten Eigenschaften dieser Mengen:

Theorem 1. *Sei ein Halb-Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ von X gegeben. Für jedes $x \in X$ gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $y \in \omega(x) \iff \exists$ eine Folge $t_k \nearrow +\infty$ in $\mathbb{R}^+$, sodass $\varphi_{t_k}(x) \to y$, wenn $k \to \infty$

(ii) Falls Φ ein topologischer Halb-Fluss, dann ist $\omega(x)$ vorwärts-Φ-invariant

Beweis. (i) "$\Rightarrow$"

Wir haben $\omega(x) = \bigcap\limits_{t>0} \overline{A_t}$, wobei $A_m = \{\varphi_s(x) : s > t\}$. Sei nun $y \in \omega(x)$. Wir betrachten folgende 2 Fälle:

1. Falls $y \notin \bigcap\limits_{t>0} A_t$, dann existiert ein $p > 0$, sodass $y \notin A_p$.
   Somit gilt $y \in \overline{A_p} \setminus A_p$ und es existiert eine Folge $t_k \nearrow \infty$ in $\mathbb{R}^+$, sodass $\varphi_{t_k}(x) \to y$ für $k \to \infty$.
2. Falls $y \in \bigcap\limits_{t>0} A_t$, dann existiert ein $p > 0$, sodass $y \in \varphi_p(x)$.
   Da $y \in A_t$ für $t > p$, existiert ein $q > p$, sodass $y = \varphi_q(x)$. Somit gilt:
   $\varphi_{(q-p)*k}(\varphi_p(x)) = y$ für $k \in \mathbb{N}$ und die wachsende Folge $t_k = (q-p)*k+p$ erfüllt $\varphi_{t_k}(x) = y$.

"$\Leftarrow$"

Falls eine Folge $t_k \nearrow \infty$ in $\mathbb{R}^+$ existiert, sodass $\varphi_{t_k}(x) \to y$ für $k \to \infty$, dann ist

$y \in \overline{A_t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ und somit ist $y \in \omega(x)$.

(ii) Sei nun $y \in \omega(x)$ und $t \in \mathbb{R}^+$. Mit der ersten Eigenschaft (i) gilt, dass eine Folge $t_k \nearrow \infty$ in $\mathbb{R}^+$ existiert, sodass $\varphi_{t_k}(x) \to y$ für $k \to \infty$.
Es folgt von der Stetigkeit von φ_t (Φ ein topologischer Halbfluss, nach Voraussetzung), dass $\varphi_{t_k+t}(x) = \varphi_t(\varphi_{t_k}(x)) \to \varphi_t(y)$, wenn $k \to \infty$ und somit: $\varphi_t(x) \in \omega(x)$.
Somit ist $\omega(x)$ vorwärts Φ-invariant.

□

Theorem 2. *Sei ein **topologischer** Halb-Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ von X gegeben. Falls der positive Halborbit $\gamma^+(x)$ eines Punktes $x \in X$ einen kompakten Abschluss hat, gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $\omega(x)$ ist kompakt, zusammenhängend (/verbunden) und nicht leer

(ii) $inf\{d(\varphi_t(x), y) : y \in \omega(x)\} \to 0$, wenn $t \to +\infty$

Beweis. (i)

- $\omega(x)$ **kompakt**
  Per Definition ist $\omega(x)$ abgeschlossen. Da $\omega(x) \subset \overline{\gamma^+(x)}$ und die Hülle des (positiven) Halborbits $\gamma^+(x)$ kompakt ist, ist die Menge $\omega(x)$ ebenfalls kompakt.
- $\omega(x)$ **nicht leer**
  Betrachten wir nun die Folge $\varphi_{t_k}(x)$ in $\omega(x)$, mit $t_k \nearrow \infty$ für $k \to \infty$. Da diese in der kompakten Teilmenge $\overline{\gamma^+(x)}$ des metrischen Raumes X enthalten ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\varphi_{t_s}(x) \to y$ mit $t_s \nearrow \infty$ für $s \to \infty$.
  Somit können wir Theorem 1 (i) anwenden, um zu schlussfolgern, dass der Limes von φ_{s_k} in $\omega(x)$ liegt. Da dieser Limes nun in $\omega(x)$, kann $\omega(x)$ nicht leer sein.
- $\omega(x)$ **zusammenhängend -** *Widerspruchsbeweis*
  Wenn $\omega(x)$ nicht zusammenhängend wäre, dann könnten wir die Menge schreiben als $\omega(x) = A \cup B$, wobei A und B zwei nicht-leere, disjunkte und getrennte Mengen wären, also

$$\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Da $\omega(x)$ abgeschlossen (sogar kompakt) ist, gilt:

$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{A} \cap \omega(x)\\ &= \overline{A} \cap (A \cup B)\\ &= (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)\\ &= A\end{aligned}$$

und analog $\overline{B} = B$. Dies zeigt also, dass die Mengen A und B ebenfalls abgeschlossen (sogar kompakt) sind. Dies wiederum impliziert, dass zwischen den Mengen eine positive Distanz ist, also[4]

$$\delta := \inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\} > 0.$$

Betrachten wir nun die abgeschlossene Menge

$$C = \{z \in X : d(z,y) \geq \delta/4 \text{ für } y \in \omega(x)\} \tag{6}$$

Wir beachten zudem, dass

$$C \cap \{\varphi_s(x) : s > t\} \neq \emptyset \tag{7}$$

für $t > 0$, da sonst die Menge $\{\varphi_s(x) : s > t\}$ vollständig in der $\delta/4$-Umgebung von A oder B enthalten wäre.[5]
Somit wäre mit der ersten Eigenschaft von Theorem 1 entweder $\omega(x) \cap A = \emptyset$ oder $\omega(x) \cap B = \emptyset$. Dies ist jedoch unmöglich, da $\omega(x) = A \cup B$ mit A und B nicht-leer.
Es folgt mit (7), dass eine Folge $t_k \nearrow \infty$ existieren muss, sodass $\varphi_{t_k}(x) \in C$ für $k \in \mathbb{N}$. Darüber hinaus folgt mit der Kompaktheit von $C \cap \overline{\gamma^+(x)}$ und erneuter Anwendung von Theorem 1 (i), dass $C \cap \omega(x) \neq \emptyset$.
Dieser Widerspruch zeigt, dass die Menge $\omega(x)$ zusammenhängend ist.

(ii) Falls der Abstand nicht gegen 0 konvergieren würde, müsste ein $\delta > 0$ und eine Folge $t_k \nearrow \infty$ existieren, sodass

$$\inf\{d(\varphi_{t_k}(x), y) : y \in \omega(x)\} \geq \delta \tag{8}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Da die Menge $\overline{\gamma^+(x)}$ kompakt ist, müsste eine konvergente Teilfolge $\varphi_{s_k}(x)$ von $\varphi_{t_k}(x)$ existieren, deren Limes (mit Theorem 1 (i)) ein Punkt $p \in \omega(x)$ wäre.
Zudem folgt mit (8), dass $d(\varphi_{s_k}(x), y) \geq \delta$ für $y \in \omega(x)$ und $k \in \mathbb{N}$.
Somit wäre auch $d(p,y) \geq \delta$ für $y \in \omega(x)$, was jedoch unmöglich ist, da $p \in \omega(x)$.
□

[4]Aus Kompaktheit folgt, es existieren konv. Teilfolgen a_n und b_n mit $a_n \to a und b_n \to b$, sodass für alle konv. Teilfolgen $a \neq b$ weil A und B disjunkt.
[5]Da $\varphi_s(x)$ stetig und und der Abstand $d(\varphi_s(x), a) + d(\varphi_s(x), b) \geq \delta$ mit Zwischenwertsatz.

Theorem 3. *Sei ein Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von X gegeben. Für jedes $x \in X$ gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $y \in \alpha(x) \iff \exists$ *eine Folge* $t_k \searrow -\infty$ *in* $\mathbb{R}^-$, *sodass* $\varphi_{t_k}(x) \to y$, *wenn* $k \to \infty$

(ii) Falls Φ ein topologischer Fluss, dann ist $\alpha(x)$ rückwärts-Φ-invariant

Beweis. Wende Theorem 1 von ω-Limesmenge auf $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ an. □

Theorem 4. *Sei ein **topologischer** Fluss $\Phi = (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ von X gegeben. Falls der negative Halborbit $\gamma^-(x)$ eines Punktes $x \in X$ einen kompakten Abschluss hat, gelten folgende Eigenschaften:*

(i) $\alpha(x)$ ist kompakt, zusammenhängend (/verbunden) und nicht leer

(ii) $inf\{d(\varphi_t(x), y) : y \in \alpha(x)\} \to 0$, *wenn* $t \to -\infty$

Beweis. Wende Theorem 2 von ω-Limesmenge auf $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ an. □