Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I
Klausur Lösung

22. Januar 2021

1. Zum Aufwärmen.

(a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Ungleichung:

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Induktionsanfang: für $n = 1$: $1! = 1 = 2^0$. **(1P)**
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$. **(1P)**
Induktionsschluss: Für $n + 1 \geq 2$:

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{(n+1)-1}.$$

(1P) für die Bestätigung der Ungleichung für $n = 1$.
(1P) für die Annahme, dass die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(1P) für $(n+1)! = (n+1)n!$
(1P) für $n + 1 \geq 2$
(1P) für die Schlussfolgerung, dass die Ungleichung für $n + 1$ gilt.

(b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 + 0 = 0.$$

(1P) für die Zerlegung des Bruchs, oder das Erweitern mit $1/n$.
(1P)+(1P) für die Berechnung der Grenzwerte der Summanden bzw. Zähler und Nenner.

2. Achtung die Kurve! Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{x^2}{e^x}.$$

(a) Wir berechnen die Ableitungen:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$
$$f''(x) = (2-2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = \frac{2 - 4x + x^2}{e^x}.$$

Also sind die kritischen Punkte gleich $x = 0, 2$. Wegen $f''(0) = 2 > 0$ ist $x = 0$ ein lokales Minimum, und wegen $f''(2) = -4e^{-2} < 0$ ist $x = 2$ ein lokales Maximum. Man kann auch $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ und $f' > 0$ auf $(0, 2)$ benutzen.
(2P) Berechnung von $f'(x)$.
(2P) Berechnung der beiden Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 2$.
(2P) Berechnung der beiden zweiten Ableitungen bzw. der Vorzeichen von $f'(x) < 0$ auf $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ und $f' > 0$ auf $(0, 2)$.

(b) Für $x \to -\infty$ gehen sowohl $x^2 \to \infty$ als auch $e^{-x} \to \infty$. Deshalb konvergiert $x^2 e^{-x} \to \infty$. Für $x \to \infty$ gehen x^2 und e^x nach ∞, also können wir zweimal die zweite Regel von L'Hopital benutzen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

(1P) für $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \infty$.
(2P) für zweimalige Anwendung der ersten Regel von L'Hopital bei $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. Wenn nur dasteht, dass das exponentielle Wachstum das potentielle dominiert, dann gibt es nur **(1P)** für $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$.

(c) Aus dem Monotonieverhalten in (a) und $f(0) = 0$ und den Grenzwerten (b) folgt, dass f bei $x = 0$ ein globales Minimum mit Wert $f(0) = 0$ annimt. Nach (b) gibt es außerdem kein globales Maximum. Also ist das Bild $f[\mathbb{R}] = [0, \infty)$.
(2P) für Monotonieverhalten, oder die Abschätzung $f(x) \geq 0$.
(1P) für $f(0) = 0 = \min f[\mathbb{R}]$.
(1P) für $\infty = \sup f[\mathbb{R}]$.

3. Integrative Arbeit.

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) Sei $u = \pi x^2$. $u(0) = 0, u(1) = \pi$. $du = 2\pi x \, dx$.

$$\int_0^1 \pi x \sin(\pi x^2) \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin(u) \, du = -\frac{1}{2} \cos(u)\Big|_0^\pi$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(\pi) + \frac{1}{2}\cos(0) = 1$$

(1P) für iregendeine Substitution einschließlich der Substituion von dx.
(1P) für das Berechnen einer Stammfunktion nach der Substitution.
(1P) für die Resubstituion oder die Substitution der Grenzen.
(1P) für Einsetzen der Grenzen.

(b) Seien $u = 2x^2 - 1, v' = e^x$. $u' = 4x, v = e^x$

$$\int (2x^2 - 1)e^x \, dx = uv - \int u'v \, dx = (2x^2 - 1)e^x - \int 4xe^x \, dx.$$

Seien $u = 4x, v' = e^x$. $u' = 4, v = e^x$

$$\int 4xe^x \, dx = 4xe^x - \int 4e^x \, dx = 4xe^x - 4e^x.$$

Zusammen

$$\int (2x^2 - 1)e^x \, dx = (2x^2 - 1)e^x - 4xe^x + 4e^x + C = (2x^2 - 4x + 3)e^x + C.$$

(3P) für beide partielle Integrationen, wobei immer das Polynom als der Faktor zu wählen ist, der nur abgeleitet wird. Wenn eine partielle Integration richtig ausgeführt wird, aber keine Stammfunktion gefunden wird, dann gibt es nur **(1P)**
(1P) für die Stamfunktion.

(c) Sei $\frac{x+11}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$. Also $A(x+5) + B(x-1) = x + 11$. $x = -5$ zeigt $B = -1$ und $x = 1$ zeigt $A = 2$.

$$\int \frac{x+11}{(x-1)(x+5)}\, dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+5}\, dx = 2\ln|x-1| - \ln|x+5| + C.$$

(1P) für den Ansatz $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$.
(1P) für die Gleichung an A und B.
(1P) für das Berechnen von A und B.
(1P) für das Berechnen des Integrals.

4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Es gibt drei Möglichkeiten, diese Aufgabe zu lösen:

Variante 1: Wir berechenen den Differenzenquotienten und wenden dann zweimal die erste Regel von l'Hopital an:

$$h(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{x}(e^x - 1) - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

für $x \neq 0$. Zweimalige Anwendung der ersten Regel von L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0\pm} h(x) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{e^x}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Wenn wir $f'(0) = \frac{1}{2}$ setzen, ist die Differenzquotient stetig. d.h. f differenzierbar in $x = 0$ ist.
(1P) für die Berechnung des Differenzenquotienten.
(1P) für die Berechnung der Ableitung von Zähler und Nenner bei der ersten Anwendung der ersten Regel von L'Hopital.
(1P) für die Berechnung der Ableitung von Zähler und Nenner bei der zweiten Anwendung der ersten Regel von L'Hopital.
(1P) dafür dass in iergendeiner Form $\lim_{x \to 0-} h(x) = \lim_{x \to 0+} h(x)$ mit zweimaliger Anwendung der ersten Regel von L'Hopital gezeigt wird.
(1P) für die Aussage, dass f bei $x = 0$ differenzierbar ist.

Variante 2: Die erste Regel von L'Hopital wird einmal auf die Ableitung $f'(x)$ angewendet:

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2}.$$

für $x \neq 0$. Eine Anwendung der ersten Regel von L'Hopital:

$$\lim_{x \to 0\pm} f'(x) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{e^x + (x-1)e^x}{2x} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{e^x}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

Der Mittelwertsatz zeigt, dass f bei $x = 0$ differenzierbar ist mit $f'(0) = \frac{1}{2}$.
(1P) für die Berechnung der Ableitung.
(1P) für die Berechnung der Ableitung von Zähler und Nenner bei der Anwendung der ersten Regel von L'Hopital.
(1P) für das Kürzen von x.
(1P) dafür dass in iergendeiner Form $\lim_{x \to 0-} f'(x) = \lim_{x \to 0+} f'(x)$ mit der

ersten Regel von L'Hopital gezeigt wird.

(1P) für die Aussage, dass f bei $x = 0$ differenzierbar ist.

Variante 3: Wir schreiben $f(x)$ für $x \neq 0$ als Potenzreihe und kürzen ein x:

$$f(0) = \frac{1}{x}(e^x - 1) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Und für $x = 0$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{1!} = 1 = f(0)$ und $f'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Deshalb ist f analytisch und differenzierbar für alle x.

(1P) für das hinschreiben der Potenzreihe von f ohne sie umzurechnen.

(1P) dafür, dass diese Potenzreihe im Zähler keinen Term mit x^0 enthält.

(1P) für das Kürzen von einem x.

(1P) dafür dass eine Potenzreihe entsteht.

(1P) für die Aussage, dass f bei $x = 0$ differenzierbar ist.

5. Monotone Funktionen sind Regelfunktionen

(a) Wenn $\inf I < x < \sup I$, dann ist x größer als die größte untere Schranke und kleiner als die kleinste obere Schranke. Also ist x weder eine untere noch eine obere Schranke von I. Also gibt es sowohl ein Element x_1 von I, dass kleiner ist als x, als auch ein Element x_2, das größer als x ist.

(1P) dafür, dass x keine untere Schranke von I ist.

(1P) dafür, dass x keine obere Schranke von I ist.

(b) Seien $I = f^{-1}[J]$ und $x \in (\inf I, \sup I)$. Nach (a) existieren $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$. Weil f monoton wachsend ist, folgt $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Wir wissen, dass $f(x_1), f(x_2) \in J$ und J ein Intervall ist, also $f(x) \in J$. Deshalb $x \in I$. Das zeigt, dass $(\inf I, \sup I) \subset I$.

(1P) für die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

(1P) für $f(x) \in J$.

(c) In den beiden Fälle, dass I leer, und dass I nur einen Punkt enthält, ist die Aussage so formuliert, dass nichts zu zeigen ist.

Wenn also I mehr als zwei Punkte enthält, dann ist I als Teilmenge von $[0, 1]$ beschränkt und es existieren $a = \inf I$ und $b = \sup I$. Weil a eine untere Schranke von I ist und b eine obere Schranke von I ist, ist I in $[a, b]$ enthlaten. Wegen (b) enthält I das Intervall (a, b). Dann ist I, jedamdem ob es $\inf I = a$ bzw. $\sup I = b$ enthält eine der vier Intervalle $(a, b), (a, b], [a, b)$, oder $[a, b]$.

(1P) wenn I leer ist, oder nur einen Punkt enthält ist die Aussage richtig. Wenn es diesen Punkt nicht gibt, dann darf im folgenden immer angenommen werden, dass I mindestens zwei Zahlen enthält, auch ohne dass das dasteht.

(1P) I ist wegen (b) eins der Intervalle $(\inf I, \sup I)$, $[\inf I, \sup I)$, $(\inf I, \sup I]$ oder $[\inf I, \sup I]$. Diesen Punkt gibt es auch, wenn

$(\inf I, \sup I) \subset I \subset [\inf I, \sup I]$ dasteht, oder wenn erkannt wurde, dass es nur vier Möglcihkeiten gibt, jenachdem ob I sein Infimum bzw. Supremum enthält.

(d) Wegen der Monotonie muss $f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ in $[f(0), f(1)]$ liegen. Dieses Intervall wird offenbar für alle $n \in \mathbb{N}$ durch die disjunkten Intervalle $[y_0, y_1) \cup [y_1, y_2) \cup \ldots \cup [y_{n_1}, y_n) \cup \{y_n\}$ überdeckt. Desbalb gilt für jedes $x \in [0,1]$ genau einer der Fälle in der Definition von f_n. Dann folgt aber $f_n(x) = y_k \le f(x) < y_{k+1} = f_n(x) + \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$ für ein $k = 0, \ldots, n-1$. Das zeigt die Ungleichung in (c).

(1P) dafür dass in iergendeiner Form erkannt wird, dass für jedes $x \in [0,1]$ eine der Ungleichungen $y_k \le f(x) < y_{k+1}$ für $k = 0, \ldots, n-1$ oder $f(x) = y_n$ gelten muss.

(1P) dafür dass erkannt wird, dass $y_k = f_n(x)$ in $y_k \le f(x) < y_{k+1}$ eingesetzt werden kann.

(1P) dafür dass in iergendeiner Form $y_{k+1} - y_k = \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$ erkannt wird.

(e) Weil $(\frac{1}{n}(f(1) - f(0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, folgt aus (d), dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geleichmäßig gegen f konvergiert. Aufgrund der Definition von f_n stimmt diese Funktion mit

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \chi_{f^{-1}[[y_k, y_{k+1})]}$$

überein. Wegen (c) sind die Urbilder $f^{-1}[[y_k, y_{k+1})]$ entweder leer oder Intervalle. Also ist f_n eine Treppenfunktion. Wegen (d) ist also f ein gleichmässiger Grenzwert von Treppenfunktionen. Dann ist f aufgrund der Definition von Regelfunktionen eine solche Regelfunktion.

(1P) dafür dass in iergendeiner Form erkannt wird, dass $(\frac{1}{n}(f(1) - f(0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(1P) dafür dass aus (c) folgt, dass f_n eine Treppenfunktion ist.

(1P) dafür dass in iergdeiner Form erwähnt wird, dass ein gleichmäßiger Grenzwert von Treppenfunktionen eine Regelfunktion ist. Es genügt Ein Verweis auf die Definition von Regelfunktionen.