Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I
Nachllausur

27. Februar 2021

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Bitte unterschreiben Sie die Klausur auf dem Deckblatt und versehen jedes zusätzliche Blatt, das nicht angeheftet ist, mit Ihrem Namen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.
- Es dürfen nur alle im Skript (auch mit * gekennzeichnete), in den Übungszetteln und in der Großübung bewiesene Aussagen verwendet werden. Aussagen, die von Ihren TutorInnen außerhalb des vom Lehrstuhl bereitgestellten Materials bewiesen wurden dürfen **nicht** verwendet werden.

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1 (a)	5		4	5		
(b)	3		5 (a)	2		
2 (a)	6		(b)	2		
(b)	3		(c)	2		
(c)	4		(d)	3		**Note:**
3 (a)	4		(e)	3		
(b)	4					
(c)	4					

1. Zum Aufwärmen.

(a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Ungleichung:

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{n}.$$

(3 Punkte)

2. Achtung die Kurve!

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{x^2}{e^x}$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und untersuchen Sie, ob sie lokale Minima oder lokale Maxima sind. *(6 Punkte)*

(b) Bestimmen $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und begründen Sie ihr Ergebnis. *(3 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie den Bildbereich $f[\mathbb{R}]$ und begründen Sie ihr Ergebnis. *(4 Punkte)*

3. Integrative Arbeit.

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \pi x \sin(\pi x^2)\, dx$ *(4 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int (2x^2 - 1)e^x\, dx$ *(4 Punkte)*

(c) $\displaystyle\int \frac{x + 11}{(x-1)(x+5)}\, dx$ *(4 Punkte)*

4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}(e^x - 1) & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$

Diese Funktion ist der Differenzenquotient von der differenzierbaren Funktion $x \mapsto e^x$ bei $x = 0$, also stetig. Untersuchen Sie, ob diese Funktion bei $x = 0$ auch differenzierbar ist (Hinweis: es gibt mehrere Lösungsmöglichkeiten, eine davon benutzt eine Regel von L'Hopital). *(5 Punkte)*

5. Monotone Funktionen sind Regelfunktionen

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine *monoton wachsende* Funktion, die nicht konstant ist, so dass $f(0) < f(1)$ gilt. Die folgenden Teilaufgaben können Sie unabhängig voneinander bearbeiten, wobei Sie jeweils die genannten Aufgabenteile benutzen dürfen, auch wenn Sie diese (noch) nicht gezeigt haben:

(a) Sei I eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, die mehr als eine Zahl enthält. Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in (\inf I, \sup I)$ zwei Zahlen x_1 und x_2 in I gibt, für die $x_1 < x < x_2$ gilt. (Hinweis: benutzen Sie die Definition vom Infimum und Supremum.) *(2 Punkte)*

(b) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dessen Urbild $I = f^{-1}[J]$ mehr als eine Zahl enthält. Zeigen Sie mit (a), dass dieses Urbild $I = f^{-1}[J]$ das Intervall $(\inf I, \sup I)$ enthält. *(2 Punkte)*

(c) Folgern Sie aus (b), dass das Urbild $I = f^{-1}[J]$ eines beliebigen Intervalles $J \subset \mathbb{R}$ entweder leer oder ein Intervall ist. Dabei zählen auch die einpunktigen Mengen zu den Intervallen. *(2 Punkte)*

(d) Weil f monoton wachsend ist, ist das Bild $f[[0,1]]$ eine Teilmenge von $[f(0), f(1)]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $f(0) = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = f(1)$ die Zahlen $y_k = f(0) + \frac{k}{n}(f(1) - f(0))$ mit $k = 0, \ldots, n$, die $[f(0), f(1)]$ in n gleichgroße Intervalle teilen. Dann definieren wir

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) := \begin{cases} y_0 & \text{falls } y_0 \le f(x) < y_1 \\ y_1 & \text{falls } y_1 \le f(x) < y_2 \\ & \vdots \\ y_{n-1} & \text{falls } y_{n-1} \le f(x) < y_n \\ y_n & \text{falls } f(x) = y_n \end{cases}.$$

Zeigen Sie $0 \le f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n}(f(1) - f(0))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [0,1]$. *(3 Punkte)*

(e) Folgern Sie aus (d), dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, und dann mithilfe von (c), dass f eine Regelfunktion ist. *(3 Punkte)*

Hier ist ein Beispiel mit einer nichtstetigen monoton wachsenden Funktion f und $n = 4$. Der Graph von f besteht aus den durchgezogenen und der von f_4 aus den gestrichelten Linien. Bei $x = \frac{1}{2}$ liegt $f(\frac{1}{2})$ zwischen y_1 und y_2. Daher ist $f_4(\frac{1}{2}) = y_1$. Dieses Diagramm zeigt ein typisches Beispiel zum besseren Verständnis. **Sie sollten jedoch den Beweis allgemein führen.**