Martin Schmidt
Ross Ogilvie

16. Oktober 2020

Analysis I

3. Übung

8. Elementare Rechnenregeln.
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Regeln:

(a) $\big(a < b \text{ und } c < d\big) \implies a + c < b + d\,.$ *(2 Punkte)*

(b) $\big(0 < a < b \text{ und } 0 < c < d\big) \implies ac < bd\,.$ *(2 Punkte)*

(c) $ab > 0 \iff \big(a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0\big)\,.$ *(4 Punkte)*

(d) $ab < 0 \iff \big(a > 0, b < 0 \text{ oder } a < 0, b > 0\big)\,.$ *2 Punkte)*

Lösung.

(a) Es gelte $a < b$ und $c < d$. Nach der Monotonie (A4 (iii)) folgt aus $a < b$ auch $a + c < b + c$, sowie aus $c < d$ die Ungleichung $c + b < d + b$. Aus diesen beiden Ungleichungen ergibt sich mit der Transitivität: $a + c < d + b$.

(b) Es gelte $0 < a < b$ und $0 < c < d$. Nach der Monotonie (A4 (iii)) folgt aus $a < b$ und $c > 0$ die Ungleichung $ac < bc$, sowie aus $c < d$ und $b > 0$ die Ungleichung $cb < db$. Aus diesen beiden Ungleichungen ergibt sich mit der Transitivität (A4 (ii)): $ac < db$.

(c) <u>Beh.</u> $ab > 0 \iff (a > 0, b > 0 \text{ oder } a < 0, b < 0)$
<u>Bew.</u> „$\Longrightarrow$“ Sei $ab > 0$. Da somit insbesondere $ab \neq 0$ ist, ist nach Satz 2.10 (ii) auch $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Aus $a \neq 0$ folgt mit der Totalität der Ordnung (A4 (i)), dass $a < 0$ oder $a > 0$ gilt. Ist $a > 0$, so auch $\frac{1}{a} > 0$ (Satz 2.14 (v)), und somit nach Monotonie (A4 (iii)) $\frac{1}{a} \cdot (ab) > 0$, d.h. $b > 0$. Ist andererseits $a < 0$, so ist $-a > 0$ (Satz 2.14 (i)), also $-\frac{1}{a} > 0$ nach Satz 2.14(v), also nach Monotonie (A4 (iii)) $-\frac{1}{a}(ab) > 0$, d.h. $-b > 0$ und somit nach Satz 2.14(i) $b < 0$. Also gilt in jedem Fall die rechte Seite der Behauptung.
„$\Longleftarrow$“ Gelte also die rechte Seite der Beh.. Ist $a > 0, b > 0$, so folgt aus der Monotonie (A4 (iii)) direkt $ab > 0$. Ist $a < 0, b < 0$, so ist nach Satz 2.14(i) $-a > 0, -b > 0$, also nach Monotonie (A4 (iii)) $(-a) \cdot (-b) > 0$, d.h. nach Satz 2.10(v) $ab > 0$.

(d) Sei $ab < 0$. Dann ist nach Satz 2.10(iii) und Satz 2.14(i) $-ab = (-a)b > 0$. Nach Teil (c) ist dann $-a > 0, b > 0$ (das ist wieder äquivalent zu $a < 0, b > 0$) oder $-a < 0, b < 0$ (was äquivalent zu $a > 0, b < 0$ ist).
Bemerkung: Statt $-ab = (-a)b$ kann man freilich genauso die Zerlegung $-ab = a(-b)$ wählen. Der Beweis funktioniert analog.

9. Eine Ecke mehr.

(a) Zeigen Sie: Für $x > 0$ gilt $x + x^{-1} \geq 2$. *(3 Punkte)*

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die sog. *Parallelogrammungleichung*: $|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$.
[Tipp: Man zeige zuerst $|a+b| + |a-b| \geq 2\,|a|$.] *(3 Punkte)*

Lösung.

(a) Wegen Satz 2.14(iv) ist $y^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0 \leq (x-1)^2 &= (x+(-1)) \cdot (x+(-1)) && = x \cdot (x+(-1)) + (-1) \cdot (x+(-1)) \\ &= x^2 + x(-1) + (-1)x + (-1)(-1) && = x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

$2x \leq x^2 + 1$ folgt. Satz 2.14(v) sagt dass, $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$ ist. Deshalb

$$\begin{aligned} 2xx^{-1} &\leq (x^2+1)x^{-1} \\ 2 &\leq x + x^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Satz 2.19(iii) und Satz 2.22(iii) heißen die Dreiecksungleichung. Seien $x = a+b$ und $y = a-b$ in Satz 2.19(iii). Dann

$$|a+b| + |a-b| \geq |(a+b) + (a-b)| = |2a| = 2|a|$$

gilt. Auch ist $|a+b| + |a-b| = |a+b| + |b-a| \geq 2|b|$. Wegen Übung 8(a) ist

$$\begin{aligned} 2|a| + 2|b| &\leq (|a+b| + |a-b|) + (|a+b| + |a-b|) \\ 2(|a| + |b|) &\leq 2(|a+b| + |a-b|) \\ |a| + |b| &\leq |a+b| + |a-b|. \end{aligned}$$

10. Grundschulmathematik.

Man zeige:

(a) die berühmte Gaußsche Summenformel: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *(3 Punkte)*

(b) $n^2 \leq 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 3$. *(4 Punkte)*

(c) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar. *(3 Punkte)*
[Tipp. Wenn $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so dass $10^n = 27m - 18n + 28$.]

Lösung.

(a) Bewies durch vollständige Induktion. Induktionsanfang (I.A.), n=1:

$$\sum_{k=1}^{1} = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschrift (I.S.):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)\big((n+1)+1\big)}{2}.\end{aligned}$$

(b) Auch bier Beweis durch vollständige Induktion und ein paar Sondernfälle. Zuerst die Sondernfälle:

$$\begin{aligned} n = 1: &\qquad 1^2 = 1 \leq 2 = 2^1, \\ n = 2: &\qquad 2^2 = 4 \leq 4 = 2^2. \end{aligned}$$

Nun vollständige Induktion:
I.A.: $n = 4$: $4^2 = 16 \leq 16 = 2^4$.
I.V.: Die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.
I.S.: Behauptung: Die Ungleichung $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$ is auch erfüllt. Es gilt

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2^n + 2n + 1.$$

Und $2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2^n + 2^n$. Die Frage ist denn: ist 2^n größer als $2n+1$? Für $n \geq 4$, gilt

$$n^2 \geq 4n = 2n + 2n \geq 2n + 8 \geq 2n + 1.$$

Danach

$$(n+1)^2 \leq 2^n + 2n + 1 \leq 2^n + n^2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

(c) I.A.: $n = 1$: $10^1 + 18 \cdot 1 - 28 = 0 = 27 \cdot 0$.
I.V.: Die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
I.S.: Wir wissen: Es gibt ein $a \in \mathbb{N}$ so dass $10^n + 18n - 28 = 27a$ ist. Es folgt dass, $10^n = 27a - 18n + 28$ und

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 18(n+1) - 28 &= 10 \cdot 10^n + 18n - 10 \\ &= 10(27a - 18n + 28) + 18n - 10 \\ &= 270a - 162n + 270 \\ &= 27(10a - 6n + 10). \end{aligned}$$

Deshalb ist $10^{n+1} + 18(n+1) - 28$ auch durch 27 teilbar.

11. Endlich beschränkt.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion: Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ besitzt ein Maximum. (Der Beweis für das Minimum geht analog.)

(3 Punkte)

Lösung. Wir zeigen die Behauptung für das Maximum.

Es sei $M \subset \mathbb{K}$. Wir betreiben vollständige Induktion über $n := |M|$.

I.B.$\underline{n = 1:}$ Ist $M \subset \mathbb{K}$ einelementig, etwa $M = \{a\}$ mit $a \in \mathbb{R}$, so ist a offenbar Maximum von M.

I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

I.S.$\underline{n \mapsto n + 1:}$ $M \subset \mathbb{K}$ habe $n + 1$ Elemente. Wir fixieren ein $a \in M$, dann ist $\widetilde{M} := M \backslash \{a\}$ eine n-elementige Menge. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\widetilde{M}$ also ein Maximum $m \in \mathbb{K}$. Es gilt offenbar $M = \widetilde{M} \cup \{a\}$ und deswegen: Ist $a \leq m$, so ist m auch Maximum von M; ist hingegen $a > m$, so ist a Maximum von M.

Mehr Übungen.

12. Grundschulmathematik.

Man zeige:

(d) für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$. *(4 Punkte)*

(e) für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. *(3 Punkte)*

Lösung.

(e) **I.B.** $\underline{n=1:}$ $\sum_{k=0}^{1} a^k = 1 + a = \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} = \frac{a^2-1}{a-1}$
I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
I.S. $\underline{n \mapsto n+1:}$ Gelte also $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} + \frac{a^{n+1}(a-1)}{a-1}$$
$$= \frac{a^{n+1}-1+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2}-1}{a-1} = \frac{a^{(n+1)+1}-1}{a-1}\,.$$

13. 00101010.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge ($n \in \mathbb{N}$) besitzt 2^n Elemente. *(5 Punkte)*

Lösung.

I.B. $\underline{n=1:}$ Sei M eine einelementige Menge, etwa $M = \{a\}$. Dann ist $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{a\}\}$ und somit $|\mathcal{P}(M)| = 2$.
I.V. Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
I.S. $\underline{n \mapsto n+1:}$ Sei M eine $(n+1)$-elementige Menge. Wir fixieren $a \in M$ und setzen $\widetilde{M} := M\backslash\{a\}$; dies ist eine n-elementige Menge. Wir zeigen gleich

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\widetilde{M}) \;\cup\; \left\{\widetilde{N} \cup \{a\} \mid \widetilde{N} \in \mathcal{P}(\widetilde{M})\right\}. \qquad (*)$$

Sei $\widetilde{P} := \left\{\widetilde{N} \cup \{a\} \mid \widetilde{N} \in \mathcal{P}(\widetilde{M})\right\}$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzen sowohl $\mathcal{P}(\widetilde{M})$ als auch $\widetilde{P}$ je 2^n Elemente; da offenbar $\mathcal{P}(\widetilde{M}) \cap \widetilde{P} = \varnothing$ gilt, folgt aus $(*)$, dass $|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{P}(\widetilde{M})| + |\widetilde{P}| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ gilt.

<u>Zu $(*)$:</u> "$\supseteq$" ist klar. "$\subseteq$": Sei $N \in \mathcal{P}(M)$ gegeben. Ist $a \notin N$, so ist $N \subset \widetilde{M}$, d.h. $N \in \mathcal{P}(\widetilde{M})$. Ist $a \in N$, so gilt $N = \widetilde{N} \cup \{a\}$ mit $\widetilde{N} := N\backslash\{a\} \in \mathcal{P}(\widetilde{M})$ und somit $N \in \widetilde{P}$.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 23. Oktober 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.