Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

16. Oktober 2020

4. Übung

12. Unendlich beschränkt.
Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschränkt sind und bestimmen Sie (mit Begründung!) ihr Infimum und ihr Supremum. Untersuchen Sie auch, ob Infimum und Supremum jeweils Elemente der Menge (und damit ihr Minimum bzw. Maximum) sind.

(a) $A := \{\frac{x^2}{1+x^2} | x \in \mathbb{R}\}$. *(4 Punkte)*

(b) $B := (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. *(4 Punkte)*

(c) $C := \{\frac{1+n}{1+2n} | n \in \mathbb{N}\}$. *(4 Punkte)*

Lösung.

(a) **Beschränktheit:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1$, also ist A beschränkt mit $\inf A \geq 0$ und $\sup A \leq 1$.

Obere Schranke: $\sup A = 1$, denn wäre $\sup A < 1$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass $1 - \varepsilon$ eine obere Schranke für A ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ würde gelten:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 - \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ & x^2 \leq (1-\varepsilon)(1+x^2) \\
\Leftrightarrow\ & \varepsilon(1+x^2) \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1.
\end{aligned}$$

Da ε fest ist, würde dies bedeuten, dass $\mathbb{R}$ beschränkt ist, ein Widerspruch. Also ist $\sup A = 1$. Da $x^2 < 1 + x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $1 \notin A$, also besitzt A kein Maximum.

Untere Schranke: Da $\frac{0^2}{1+0^2} = 0$ ist $0 \in A$ und somit ist $\min A = 0$.

(b) Es gilt offenbar $(\frac{1}{2}, 1) \subset B \subset (0,1)$, deshalb ist 1 das Supremum von B, und es gilt $1 \notin B$, also besitzt B kein Maximum.

0 ist untere Schranke von B. Ist $\varepsilon > 0$, so existiert nach Eudoxos ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$, und dann ist auch $a := \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) < \frac{1}{n} < \varepsilon, a > \frac{1}{n+1}$, und deshalb $a \in B$. Wegen $a < \varepsilon$ kann ε also nicht untere Schranke von B sein. Also $\inf(B) = 0$. Außerdem $0 \notin B$, also besitzt B kein Minimum.

(c) **Beschränktheit:** Wegen $n > 0$ gibt es einfachen Schranken von C:

$$0 \leq 1 + n \leq 1 + 2n \Rightarrow 0 \leq \frac{1+n}{1+2n} \leq 1.$$

Schranken: Aber können wir besser machen? Zuerst notieren Sie

$$c_n := \frac{1+n}{1+2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+2n}{1+2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+(1+2n)}{1+2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2n} + \frac{1}{2}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n \geq 1$. Also ist $3 \leq 1 + 2n$. Deshalb

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{3} \\
0 \leq & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2n} \leq \frac{1}{6} \\
\frac{1}{2} \leq & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2n} + \frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Wenn $n = 1$ ist, gilt $\frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$. Das ist dann das Maximum von A und $\sup C = \max C = \frac{2}{3}$.
C besitzt kein Minimum: Wenn c_k ein Minimum wäre, beobachten Sie

$$
\begin{aligned}
1 + 2k &< 1 + 2(k+1) \\
\frac{1}{1+2k} &> \frac{1}{1+2(k+1)} \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2k} + \frac{1}{2} &> \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2(k+1)} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Das zeigt $c_{k+1} < c_k$.

$1/2$ ist eine untere Schranke. Vielleicht ist es das Infimum. Es ist ein Infimum genau dann, wenn es eine untere Schranke und $\forall \epsilon > 0\ \exists c_n \in C$ mit $c_n < 1/2 + \epsilon$:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2n} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \epsilon \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2n} < \epsilon \\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2n > \frac{1}{2\epsilon} \\
\Leftrightarrow\ & n > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\epsilon} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

Wegen den archimedischen Eigenschaft gibt es ein solches n für jede ϵ. Deshalb gilt $\inf C = \frac{1}{2}$.

13. Doch recht viel Platz.

Zeigen Sie, dass die folgende Funktion bijektiv ist:

$$
f : (-2,3) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} \frac{t}{t+2} & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{t}{3-t} & \text{für } t > 0 \end{cases}. \qquad \textit{(8 Punkte)}
$$

[Tipp: Man zeige, dass f das Intervall $(-2,0]$ bijektiv auf das Intervall $(-\infty, 0]$, sowie das Intervall $(0,3)$ bijektiv auf das Intervall $(0,\infty)$ abbildet. Warum folgt daraus die Bijektivität von f?]

Lösung. Wir zeigen, dass f bijektiv $(-2,0)$ auf $(-\infty,0)$ und bijektiv $(0,3)$ auf $(0,\infty)$ abbildet. Da offenbar $f(0) = 0$ gilt, folgt hieraus, dass auch $f : (-2,3) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist.

Beh.: $f[(-2,0)] = (-\infty, 0)$.
"$\subseteq$": Sei $t \in (-2,0)$, also $-2 < t < 0$. Wegen $t > -2$, ist $t+2 > 0$, da außerdem $t < 0$ ist, folgt $f(t) = \frac{t}{t+2} < 0$.
"$\supseteq$": Sei $s \in (-\infty, 0)$ gegeben. Setze $t := \frac{2s}{1-s}$, dass ist wegen $2s < 0$ und $1-s > 0$: $t < 0$. Auch ist $t = -2(1-\frac{1}{s})^{-1} > -2$ wegen $-\frac{1}{s} > 0$. Also $t \in (-2,0)$. Nun gilt

$$f(t) = \frac{t}{t+2} = \frac{2s}{1-s}\left(\frac{2s}{1-s}+2\right)^{-1} = \frac{2s}{1-s} \cdot \frac{1-s}{2s+2(1-s)} = s.$$

Beh.: f von $(-2,0)$ is injektiv.
Sei $t_1, t_2 \in (-2,0)$ gegeben mit $f(t_1) = f(t_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(t_1) = f(t_2) \qquad & \Rightarrow \frac{t_1}{t_1+2} = \frac{t_2}{t_2+2} \qquad & \Rightarrow t_1(t_2+2) = t_2(t_1+2) \\ \Rightarrow t_1t_2 + 2t_1 = t_2t_1 + 2t_2 \qquad & \Rightarrow 2t_1 = 2t_2 \qquad & \Rightarrow t_1 = t_2. \end{aligned}$$

Beh.: $f[(0,3)] = (0,\infty)$.
"$\subseteq$": Sei $t \in (0,3)$, also $0 < t < 3$. Wegen $t < 3$, ist $3-t > 0$, da außerdem $t > 0$ ist, folgt $f(t) = \frac{t}{3-t} > 0$.
"$\supseteq$": Sei $s \in (0,\infty)$ gegeben. Setze $t := \frac{3s}{1+s}$, dass ist wegen $s > 0$ und $1+s > 0$: $t > 0$. Und $s < 1+s$, deshalb $t < 3$. Also $t \in (0,3)$. Nun gilt

$$f(t) = \frac{t}{3-t} = \frac{3s}{1+s}\left(3 - \frac{3s}{1+s}\right)^{-1} = \frac{3s}{1+s} \cdot \frac{1+s}{3(1+s)-3s} = s.$$

Beh.: f von $(0,3)$ is injektiv.
Sei $t_1, t_2 \in (0,3)$ gegeben mit $f(t_1) = f(t_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(t_1) = f(t_2) \qquad & \Rightarrow \frac{t_1}{3-t_1} = \frac{t_2}{3-t_2} \qquad & \Rightarrow t_1(3-t_2) = t_2(3-t_1) \\ \Rightarrow 3t_1 - t_1t_2 = 3t_2 - t_2t_1 \qquad & \Rightarrow 3t_1 = 3t_2 \qquad & \Rightarrow t_1 = t_2. \end{aligned}$$

14. Potenzielles Wachstum.
Sei $\mathbf{K}$ ein angeordneter, archimedischer Körper. Zeige, dass für $b \in \mathbf{K}$ folgendes gilt:

(a) Ist $b > 1$, so gibt es zu jeder Zahl $K \in \mathbf{K}$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n > K.$$

[*Hinweis:* Benutzen Sie Bernoullis Ungleichung (Satz 2.32) und die archimedische Eigenschaft (Satz 2.45 (i))] *(3 Zusatzpunkte)*

(b) Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$b^n < \varepsilon.$$

[*Hinweis:* Diese Aussage lässt sich aus (a) folgern.] *(2 Zusatzpunkte)*

(c) Sei nun $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Untersuchen für welches $b > 0$ die Menge $\{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Infimum, Supremum, Maximum, Minimum besitzt und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

(5 Punkte)

Lösung.

(a) Sei $K \in \mathbb{K}$ beliebig (ins besondere beliebig groß). Ist also $b > 1$, so ist $x := b - 1 > 0 > -1$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, wegen der Bernoullis Ungleichung (Satz 2.32) $b^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$. Wir müssen n wählen, sodass $1 + nx > K$.

$$1 + nx > K \;\Leftrightarrow\; nx > K - 1 \;\Leftrightarrow\; n > x^{-1}(K-1),$$

weil $x > 0$ ist. Der Archimedischen Eigenschaft: "Zu jedem Element $k \in \mathbb{K}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ mit $n > k$." Deshalb gibt es ein $n > x^{-1}(K-1)$. Da die Bernoullis Ungleichung für all $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist sei auch für ein spezielles n erfüllt. Mit diesem n:

$$b^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > K.$$

(b) Wegen Satz 2.14(vi) ist $b^{-1} > 1$ und es gilt $\epsilon^{-1} \in \mathbb{K}$, da $\epsilon \neq 0$. Nach Teil (a) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(b^{-1})^n > \epsilon^{-1}$. Satz 2.10(vi) impliziert, dass $(b^{-1})^n = (b^n)^{-1}$.

$$(b^n)^{-1} > \epsilon^{-1} \;\Leftrightarrow\; b^n > \epsilon \qquad \text{(Satz 2.14(vi))}.$$

(c) Sei $B = \{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Fall 1: Ist $b = 1$, so ist $b^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (simple Induktion!) Also ist $B = \{1\}$. Offenbar ist $\max B = \min B = \sup B = \inf B = 1$.

Fall 2: Ist $b > 1$. Die Menge B is nach oben unbeschränkt. Beweis: Angenommen gibt es eine obere Schranke s von B, d.h. $s \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber das widerspricht Aufgabeteil (a). Also hat B kein Maximum und kein Supremum. Weil

$$b > 1 \;\Rightarrow\; b^{n+1} > b^n \;\forall n \in \mathbb{N},$$

ist $\inf B = \min B = b$.

Fall 3: Ist $0 < b < 1$. Für alle $b^n \in B$ ist denn $b^n \leq b$ und $0 < b^n$ (simple Induktion). Es folgt $\sup B = \max B = b$. Wir benutzen Bemerkung 2.26 zu beweisen, dass $\inf B = 0$. 0 ist eine untere Schranke von B. Und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $b^n \in B$ mit $b^n < 0 + \epsilon$ (Aufgabeteil (b)). So $\inf B = 0$. Aber $0 \notin B$ und deshalb hat B kein Minimum.

15. Witty title

Sie wissen was Vereinigung $\cup$ ist. Aber es gibt auch *disjunkte Vereinigung* $\sqcup$. Das meint: beschriften Sie erstens die Elemente und machen Sie dann die Vereinigung. Zum Beispiel, seien $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$. $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ aber $A \sqcup B = \{1_A, 2_A, 2_B, 3_B\}$. Für endliche Menge gilt immer $|A \sqcup B| = |A| + |B|$.

Sei A eine unendliche Menge.

(a) Zeigen Sie, dass A eine abzählbare Teilmenge B hat. *(3 Punkte)*

(b) Warum ist $B \sqcup \mathbb{N}$ abzählbar? *(1 Punkte)*

(c) Wir wissen, dass $A = (A \setminus B) \cup B$ ist. Geben Sie ein bijektive Abbildung zwischen A und $A \sqcup \mathbb{N}$. Deshalb sind sie gleichmächtig. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Bewies durch vollständige Induktion. Die Behauptung ist: für jede $n \in \mathbb{N}$, gibt es eine Teilmenge $B_n \subset A$ mit genau n Elemente.

Induktionsanfang (I.A.), n=1: A ist nicht leer. Deshalb wählen Sie ein Element b_1 und sei $B_1 = \{b_1\}$.

Induktionsvoraussetzung (I.V.): Die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschrift (I.S.): Die Voraussetzung heißt: es gibt eine bijektive Abbildung $f_n : \{1, 2, \ldots, n\} \to B_n$. Wir können f_n als eine Albbildung von $\{1, 2, \ldots, n\}$ nach A betrachten. Es ist noch injektiv. Aber weil A nicht endlich ist, kann f_n nicht surjektiv sein. Deshalb gibt es ein Element $b_{n+1} \in A$ sodass b_{n+1} kein Element von $f_n(\{1, 2, \ldots, n\}) = B_n$. Sei $B_{n+1} = B_n \cup \{b_{n+1}\}$. Daher ist B_{n+1} eine Teilmenge von A mit genau $n + 1$ Elemente.

Leider sind keine B_n unendlich. Sei

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \ldots .$$

Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to B$, nämlich $f(n) = b_n$. Deshalb ist B abzählbar.

(b) Wir können eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $B \sqcup \mathbb{N}$ schreiben:

$$g(n) = \begin{cases} b_k & \text{wenn } n = 2k - 1 \\ k & \text{wenn } n = 2k. \end{cases}$$

(c) Hier können wir auch eine bijektive Abbildung $h : A \to A \sqcup \mathbb{N}$ schreiben. Sei $A' = A \setminus B$. Also unterteilen wir $A = A' \sqcup B$ und $A \sqcup \mathbb{N} = A' \sqcup B \sqcup \mathbb{N}$. Mit g von oben:

$$h(a) = \begin{cases} g(n) & \text{wenn } a = b_n \in B \\ a & \text{wenn } a \notin B \end{cases}$$

Mehr Übungen.

16. Eine ganzheitliche Vereinigung.
Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen mit $M \cup N = \mathbb{R}$, so dass $x < y$ für alle $x \in M$ und alle $y \in N$ gilt. Zeigen Sie, dass M nach oben und N nach unten beschränkt ist und dass

$$\sup(M) = \inf(N)$$

gilt. *(6 Punkte)*

Lösung.

Wegen der Voraussetzung $x < y$ für $x \in M$, $y \in N$ ist jedes $x \in M$ eine untere Schranke von N, d.h. N ist nach unten beschränkt und somit ist x kleiner-gleich der größten unteren Schranke von N, d.h. $x \leq \inf(N)$. Da dies für alle $x \in M$ gilt, zeigt diese Ungleichung, dass $\inf(N)$ eine obere Schranke von M ist, insbesondere ist M dann nach oben beschränkt. Also ist $\inf(N)$ größer-gleich der kleinsten oberen Schranke von M, d.h. $\sup(M) \leq \inf(N)$.

Wäre nun $\sup(M) < \inf(N)$, so würde für die reelle Zahl $r := \frac{1}{2}(\sup(M) + \inf(N))$ nach Satz 2.16 gelten:

$$\sup(M) < r < \inf(N) \ .$$

Wegen $r > \sup(M)$ wäre $r \notin M$, und wegen $r < \inf(N)$ wäre $r \notin N$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $M \cup N = \mathbb{R}$, so dass die Annahme $\sup(M) < \inf(N)$ widerlegt ist.

Aus $\sup(M) \leq \inf(N)$ und $\sup(M) \not< \inf(N)$ folgt $\sup(M) = \inf(N)$.

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 23. Oktober 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.