Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

13. November 2020

8. Übung

29. Konvergenz im Quadrat (no Mannheim-pun intended).

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(a) Beweise: Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ absolut. *(4 Punkte)*

(b) Belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Umkehrung von (a) falsch ist. *(1 Punkt)*

(c) Belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage von (a) falsch wird, wenn man „absolute Konvergenz“ jeweils durch „Konvergenz“ ersetzt *(1 Punkt)*

Lösung.

(a) Da $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, ist $(|a_k|)$ eine Nullfolge. Also existiert ein K so dass für alle $k \geq K$ gilt: $|a_k| < \epsilon := 1$. Für solche k gilt dann $0 \leq |a_k^2| \leq |a_k|$. Nun gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^2| = \sum_{k=1}^{K} |a_k^2| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k^2| \leq \sum_{k=1}^{K} |a_k^2| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{K} |a_k^2| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Nach dem Majoratenkriterium ist $\sum a_k^2$ absolut konvergiert.

(b) Die Folge $a_k := \frac{1}{k}$ ist ein Beispiel. Die Reihe $\sum k^{-2}$ konvergiert absolut, aber $\sum k^{-1}$ konvergiert nicht.

(c) Sei $a_k = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$. Dann $\sum a_k$ konvergiert wegen Leibnizkriterium, aber nicht absolut. Bemerke, dass $\sum a_k^2 = \sum k^{-1}$ nicht konvergiert ist.

30. Konvergenz in der Potenz (no Mannheim-pun possible).

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Wir untersuchen die hierdurch bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(a) Beweise: Falls $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ einen Grenzwert α besitzt, so ist $R := \frac{1}{\alpha}$ der Konvergenzradius obiger Potenzreihe. *(3 Punkte)*

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bestimme $\alpha_1 := \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\alpha_2 := \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, sowie den Konvergenzradius R der zugehörigen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ und folgere, dass $R \neq \frac{1}{\alpha_1}$ und $R \neq \frac{1}{\alpha_2}$ gilt.
Bemerkung: Dies zeigt, dass im Allgemeinen die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zur Bestimmung des Konvergenzradius nicht geeignet ist. *(4 Punkte)*

Lösung.

(a) Sei $\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Das heißt, für jede $\epsilon > 0$ gibt es ein N so dass

$$\alpha - \epsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \alpha + \epsilon$$

für $n \geq N$. Durch Induktion ist $(\alpha-\epsilon)^{n-N}|a_N| < |a_n| < (\alpha+\epsilon)^{n-N}|a_N|$ für $n > N$. Deshalb

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} (\alpha-\epsilon)^{n-N}|a_N||x|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} (\alpha+\epsilon)^{n-N}|a_N||x|^n$$
$$(\alpha-\epsilon)^{-N}|a_N| \sum_{n=N+1}^{\infty} ((\alpha-\epsilon)|x|)^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||x|^n \leq (\alpha+\epsilon)^{-N}|a_N| \sum_{n=N+1}^{\infty} ((\alpha+\epsilon)|x|)^n$$

Wenn $\sum a_n x^n$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{n=N+1}^{\infty}((\alpha-\epsilon)|x|)^n$. Sie ist eine geometrische Reihe, und konvergiert genau so wenn $(\alpha-\epsilon)|x| < 1$. Diese ungleichung gilt für jede $\epsilon > 0$, deshalb müss $\alpha|x| \leq 1$ sein. Also $R \leq \alpha^{-1}$.

Wenn $\sum a_n x^n$ divergent ist, divergiert auch $\sum_{n=N+1}^{\infty}((\alpha+\epsilon)|x|)^n$. Sie ist eine geometrische Reihe, und konvergiert nicht genau so wenn $(\alpha+\epsilon)|x| \geq 1$. Diese ungleichung gilt für jede $\epsilon > 0$, deshalb müss $\alpha|x| \geq 1$ sein. Also $R \geq \alpha^{-1}$ auch.

(b) Es gibt zwei Fallen. Wenn n gerade ist, gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-(n+1)} \cdot 2^{n-2} = 2^{-3}$. Wenn n ungerade ist, gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{-(n+1-2)} \cdot 2^n = 2$. Deshalb ist $\alpha_1 = 0.125$ und $\alpha_2 = 2$.

Wir können mit dem Wurzelkriterium den Konvergenzradius rechen.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \text{wenn } n \text{ gerade ist, } \sqrt[n]{2^{2-n}} = \sqrt[n]{2}^2 \cdot 2^{-1} \to \frac{1}{2}. \\ \text{wenn } n \text{ ungerade ist, } \sqrt[n]{2^{-n}} = 2^{-1} \to \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Also konvergiert $\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{1}{2}$, und der Konvergenzradius ist 2. Das ist zwischen $\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\alpha_1} = 8$.

31. Über den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus. Für $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \,.$$

(a) Schreiben Sie $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ jeweils als Potenzreihe in $x \in \mathbb{K}$. *(4 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{K}$ die folgenden Identitäten gelten:

(i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,.$ *(2 Punkte)*

(ii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cdot\cosh(y) + \sinh(x)\cdot\sinh(y)\,.$ *(2 Bonuspunkte)*

(iii) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cdot\cosh(y) + \cosh(x)\cdot\sinh(y)\,.$ *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k && = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k + \frac{1}{k!}(-1)^k x^k\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=0,\\ k \text{ ist gerade}}}^{\infty} 2\frac{1}{k!}x^k && = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}x^{2m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(-x)^k && = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k - \frac{1}{k!}(-1)^k x^k\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{k=0,\\ k \text{ ist ungerade}}}^{\infty} 2\frac{1}{k!}x^k && = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}\end{aligned}$$

(b) Nach Satz 4.20,

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left((e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right),$$

und

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^x - e^{-x}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right).$$

Deshalb

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}(2+2) = 1.$$

32. Stetigkeit unter der Erde.

Zeige, dass die Wurzelfunktion

$$\begin{aligned}[0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sqrt{x}\end{aligned}$$

stetig ist. [Tipp: Man unterscheide die Fälle $x = 0$ und $x > 0$.] *(5 Punkte)*

Lösung. Für jedes $x \in [0,\infty)$ soll gelten: Ist (x_n) eine Folge in $[0,\infty)$, die gegen x konvergiert, so konvergiert $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$. Wir unterscheiden die beiden Fälle $x = 0$ und $x > 0$.

$x = 0$: Sei $\epsilon > 0$ beliebig und (x_n) eine (beliebige) Folge in $[0,\infty)$ mit $x_n \to 0$. Daher gibt es ein N mit $|x_n| = |x_n - x| < \epsilon^2$ für alle $n \geq N$. Dann gilt

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{x_n} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon.$$

Also: Aus $x_n \to x$ folgt $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x} = 0$.

$x > 0$: Es gilt wegen $x_n \to x$, dass $|x_n - x|$ eine Nullfolge ist. Dann ist $|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}|$ eine Nullfolge, denn

$$0 \leq |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \left| \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \right| \leq \left| \frac{x_n - x}{\sqrt{x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{x}} |x_n - x| \to 0,$$

nach dem Sandwich-Satz.

Kann man den zweiten Bewies für $x = 0$ auch benutzen? Warum, oder warum nicht?

33. Ziemlich groß!

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zum Intervall $(0, 1)$. [Tipp: Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{2+2|x|} + \frac{1}{2}$ eine Bijektion zwischen den betrachteten Mengen ist.] *(4 Bonuspunkte)*

(b) Sei U eine beliebige unendliche Menge und A eine beliebige höchstens abzählbare Menge mit $U \cap A = \emptyset$. Zeigen Sie, dass U gleichmächtig zu $U \cup A$ ist. [Tipp: Satz 2.40(ii) mag hilfreich sein. *Bemerkung:* Jede unendliche Menge enthält eine Teilmenge, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.] *(4 Bonuspunkte)*

(c) Sei N die Menge aller konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Zeigen Sie, dass N abzählbar ist. *(3 Bonuspunkte)*

(d) Folgern Sie mit Hilfe von (a),(b),(c), dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist. [Tipp: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kann mit den Folgen identifiziert werden, die Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, vgl. die Bemerkung nach Satz 2.52 (warum darf man das?). Denken Sie auch an Abschnitt 4.2.] *(4 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) Wegen

$$\left| \frac{x}{2 + 2x} \right| = \frac{|x|}{2 + 2|x|} < \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$$

gilt $\frac{x}{2+2x} \in (-0.5, 0.5)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $f(x) \in (0, 1)$.

f ist injektiv auf $\mathbb{R}$*:* Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Es folgt $x_1(2 + 2|x_2|) = x_2(2 + 2|x_1|)$.
1. Fall: $x_1 \geq 0$. Dann ist auch $x_2 \geq 0$, also $x_1(2 + 2x_2) = x_2(2 + 2x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$. Deshalb ist f injektiv.
2. Fall: $x_1 < 0$. Dann ist auch $x_2 < 0$, also $x_1(2 - 2x_2) = x_2(2 - 2x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$. Deshalb ist f injektiv.

f ist surjektiv nach $(0, 1)$*:* Sei $c \in [0.5, 1)$ beliebig. Bemerke $2c - 1 \geq 0$. Wir rechen

$$f(x) = c \Leftrightarrow \frac{x}{1 + |x|} = 2c - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1 + x} = 2c - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2c - 1}{2 - 2c}.$$

Ebenfalls sei $c \in (0, 0.5)$ beliebig. Für $x = \frac{2c-1}{2c}$ ist $f(x) = c$. Daher ist f surjektiv.

(b) Wegen $U \cap A = \emptyset$ ist $U \cup A = U \sqcup A$. Benutze jetzt Aufgabe 15 Witty Title.

(c) Konvergenz $a_n \to 1$ heißt, dass für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein N so dass für jedes $n > N$ gilt $|a_n - 1| < \epsilon$. Wähl $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann muss $a_n = 1$ für $n > N$ sein. Definiere für jedes $m \in \mathbb{R}$ eine Menge von Folgen

$$N_m := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N \mid a_n = 1 \text{ für alle } n \geq m\}.$$

Es folgt dass $N = \bigcup_{m\in\mathbb{R}} N_m$. Jede Menge N_m besitzt 2^{m-1} Folgen (da es für jedes a_n mit $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ 2 mögliche Werte gibt), und ist endlich. Da die abzählbare Vereinigung höchstens abzählbarer Mengen höchstens abzählbar ist (Satz 2.40(ii)) und N nicht endlich ist, ist N abzählbar.

(d) Sei $M := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \{0,1\} \text{ für alle } n \in \mathbb{R} \text{ und } (a_n) \text{ konvergiert nicht gegen } 1\}$ die Menge aus Abschnitt 4.2 (hier mit $p = 2$). In 4.2 wurde gezeigt: M ist gleichmächtig zu $[0,1)$. Sei $R = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \{0,1\}\}$. Per Definition gilt $R = M \cup N$. Und R ist gleichmächtig zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, weil

$$X \mapsto (a_n) \text{ mit } a_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in \mathbb{N} \setminus X, \\ 1 & \text{falls } n \in X \end{cases}$$

ein Bijektion ist. Es gilt nun:

- $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zu $(0,1)$ (Teil a),
- $(0,1)$ ist gleichmächtig zu $[0,1) = \{0\} \cup (0,1)$ (Teil b),
- $[0,1)$ ist gleichmächtig zu M (Abschnitt 4.2),
- M ist gleichmächtig zu $M \cup N = R$ (Teil b und c),
- R ist gleichmächtig zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (siehe oben).

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 20. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.