Martin Schmidt
Ross Ogilvie

27. November 2020

Analysis I

10. Übung

38. Fixpunkt.

(a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$. Beweise, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert so dass $f(x_0) = x_0$. *(3 Punkte)*

(b) Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeige, dass f mindestens einen Fixpunkt hat, das heißt es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$. *(3 Bonuspunkte)*

Lösung. Hier ist eine einfache Version von dem Zwischenwertsatz 6.1. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(b) \leq 0 \leq f(a)$. Dann existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = 0$.
Beweis: Weil $\min\{f(a), f(b)\} = f(b)$ und $\max\{f(a), f(b)\} = f(a)$, wissen wir nach dem Zwischenwertsatz, dass das Bild von f das Intervall $[f(b), f(a)]$ enthält. Und 0 liegt in $[f(b), f(a)]$. Deshalb existiert x_0 mit $f(x_0) = 0$ wegen das Definition von dem Bild (Abschnitt 1.4).

(a) Setze $g(x) = f(x) - x$. Es ist stetig, weil $f(x)$ und x stetig sind. Bemerke $g(0) = 1 - 0 = 1$ und $g(1) = 0 - 1 = -1$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in (0,1)$ mit $g(x_0) = 0$. Es folgt $f(x_0) = x_0$

(b) Setze nochmal $g(x) = f(x) - x$. Wir wissen, dass $a \leq f(x) \leq b$, weil $f : [a,b] \to [a,b]$ abbildet. Deshalb gilt $g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$ und $g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. Also existiert ein Fixpunkt $x_0 \in [a,b]$ nach dem Zwischenwertsatz.

39. Differenzierbarkeit

Alte Version: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $c \in (a,b)$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $q(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ auf $x \in (a,b) \setminus \{c\}$. Zeige man, dass f in c differenzierbar (Definition 7.1) genau so wenn $\lim\limits_{x\to c} q(x)$ existiert. In diesem Fall, warum muss $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} q(x)$ sein?

Neue Version (30. November 2020): Es gibt ein Problem: wir haben noch nicht die Grenzwerte von Funktionen definiert. Das ist Definition 7.18 im Skript. Deshalb gebe ich Ihnen eine neue Version.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $c \in (a,b)$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $q(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ auf $x \in (a,b) \setminus \{c\}$.
Zeige man, dass f in c differenzierbar (Definition 7.1) genau so wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b) \setminus \{c\}$, die gegen c konvergiert, die Folge $(q(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. In diesem Fall, warum muss $f'(c) = \lim\limits_{n\to\infty} q(x_n)$ sein?

(5 Punkte)

Lösung. Nach Definition 7.1 ist die folgende Funktion

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(c) & \text{für } x = c \end{cases} = \begin{cases} q(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(c) & \text{für } x = c \end{cases}$$

stetig in c genau so wenn f in c differenzierbar ist.

Falls g stetig ist: Sei $(x_n) \subset (a,b) \setminus \{c\}$ beliebig mit $x_n \to c$. Wir wissen $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(c)$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} q(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(c) = f'(c).$$

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n)$ existiert für jede Folge $x_n \to c$: Bemerke zuerst, dass es eine Zahl L gibt so dass $L = \lim\limits_{n\to\infty} q(x_n)$ für jede Folge $(x_n)_n \in (a,b) \setminus \{c\}$ mit $x_n \to c$. Beweis: Seien zwei solche Folgen $(x_n)_n, (y_n)_n$ mit

$$L_1 = \lim_{n\to\infty} q(x_n) \;\; L_2 = \lim_{n\to\infty} q(y_n),$$

und setzen Sie

$$z_n := \begin{cases} x_k & \text{wenn } n = 2k \\ y_k & \text{wenn } n = 2k-1. \end{cases}$$

$(z_n)_n$ ist auch eine Folge in $(a,b) \setminus \{c\}$ mit $z_n \to c$ wegen Aufgabe 25. "Zweierlei". Außerdem folgt es nach Aufgabe 25, dass die Häufungspunkte von $(q(z_n))_n$ die Punkte $\{L_1, L_2\}$ sind. Aber die Voraussetzung sagt, dass $(q(x_n))_n$ konvergent ist. Daher gibt es nur einen Häufungspunkt. Also muss $L_1 = L_2$ gelten.

Setzen Sie deshalb $f'(c) := L$. Wir sollten jetzt beweisen, dass g stetig in c ist. Wir benutzen Satz 5.14(iii). Sei $(x_n) \subset (a,b)$ beliebig mit $x_n \to c$. Es gibt zwei Teilfolge: $(y_n) = \{x_n \neq c\}$ und $(z_n) = \{x_n = c\}$. Es ist klar, dass

$$\lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} g(c) = g(c) = f'(c).$$

Und

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} q(y_n) = L = f'(c),$$

weil $g(x) = q(x)$ für $x \neq c$. Weil die beide Teilfolge gegen $f'(c)$ konvergiert, muss $g(x_n)$ gegen $f'(c)$ konvergiert. Deshalb zeigt

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = f'(c) = g(c),$$

dass g stetig in c ist.

Wenn $f'(c) \neq L := \lim\limits_{n\to\infty} q(x_n)$ gilt, würde $g(y_n) \to L$ aber $g(z_n) \to g(c) = f'(c)$, und g würde nicht stetig in c sein.

40. Elementary, my dear Watson!

(a) Was ist die Ableitung von $\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1}$? Benutze man Beispiel 7.4(v).

(2 Punkte)

(b) Berechne mit Satz 7.5 die Ableitung von

(i) $\cos x + \frac{3}{x^2} - 2^x$ *(2 Punkte)*

(ii) $x^4 \ln x$ *(1 Punkt)*

(iii) $\frac{\sin x}{x}$ *(1 Punkt)*

(iv) $\exp(-x^2)$ *(1 Punkt)*

(c) Die Funktionen aus Beispiele 7.4(ii)-(iv),(vi)-(viii) und 7.8(i)-(xii) heißen *elementare Funktionen*. Wenn f und g elementare Funktionen sind, sind $f+g$, fg und $f \circ g$ auch elementar. Hat jede elementare Funktion eine Ableitung? Ist die Ableitung elementar? Warum oder warum nicht? *(1 Punkt)*

Lösung.

(a)

$$\sinh' x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{(2m+1)!} x^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} = \cosh x.$$

Man kann auch mit der Form $\sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ berechnen:

$$\sinh' x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}(-1) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x.$$

(b) **(i)**

$$\begin{aligned}(\cos x + 3x^{-2} - \exp((\ln 2)x))' &= -\sin x - 6x^{-3} - \exp((\ln 2)x) \cdot (\ln 2) \\ &= -\sin x - \frac{6}{x^3} - (\ln 2)\, 2^x.\end{aligned}$$

(ii)

$$(x^4 \ln x)' = 4x^3 \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = 4x^3 \ln x + x^3.$$

(iii)

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

(iv)

$$(\exp(-x^2))' = \exp(-x^2) \cdot (-2x) = -2x \, \exp(-x^2).$$

(c) Die Ableitungen von elementaren Funktionen wird in Beispiele 7.4 und 7.8 berechnet und sie sind elementar. Außerdem zeigen Sätze 7.5 und 7.6, dass

- $(f+g)' = f' + g'$ elementar ist,
- $(fg)' = f'g + fg'$ elementar ist,
- $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot f'$ elementar ist,

wenn f und g differenzierbar und elementar sind. Deshalb ist die Ableitung von jeder elementaren Funktion auch elementar.

41. Hinreichende Kriterien für Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer mit $0 \in X$ sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\alpha, C > 0$.

(a) Es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^\alpha$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 := 0$ stetig ist mit $f(0) = 0$. *(2 Punkte)*

(b) Nun sei X sogar eine Umgebung von 0 und es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^{1+\alpha}$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit $f(0) = f'(0) = 0$. *(3 Punkte)*

(c) Sei nun

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} |x|^{1+\alpha} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Folgern Sie aus (a) und (b), dass f sowohl stetig, als auch differenzierbar ist. Für welche $\alpha > 0$ ist die Funktion f' in einer Umgebung um 0 unbeschränkt? Für welche $\alpha > 0$ ist f *stetig* differenzierbar? *(2 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) Setze $x = 0$ zuerst. Es folgt dass $|f(0)| = 0$ und also muss $f(0) = 0$ gilt.
Es gilt $-x^\alpha \leq |x|^\alpha \leq x^\alpha$ und daher geht es gegen 0 als $x \to 0$ für $\alpha > 0$. Nun ist $-C|x|^\alpha \leq f(x) \leq C|x|^\alpha$ und deshalb $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Das zeigt, dass f in 0 stetig ist.

(b) Nach (a) wissen wir, dass $f(0) = 0$ und f ist in 0 stetig. Für $x_0 \neq 0$ sei

$$g(x_0) := \frac{f(0) - f(x_0)}{0 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Es folgt

$$|g(x_0)| = \frac{|f(x_0)|}{|x_0|} \leq \frac{C\,|x_0|^{1+\alpha}}{|x_0|} = C\,|x_0|^\alpha$$

Setzen wir denn $g(0) = 0$ und nach (a) ist g in 0 stetig. $g(x)$ ist die Funktion aus Definition 7.1 mit $x = 0$. Deshalb existiert $f'(0)$ mit $f'(0) = g(0) = 0$.

(c) Bemerke

$$|f(x)| = |x|^{1+\alpha} \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|^{1+\alpha} \text{ für } x \neq 0,$$

weil $|\sin\theta| \leq 1$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gilt. Außerdem ist $|f(0)| = 0 \leq |0|^{1+\alpha}$, also die Ungleichung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$. Jetzt folge es, dass f differenzierbar in 0 ist.
Für $x > 0$ gilt $f(x) = x^{1+\alpha} \sin \frac{1}{x}$, daher

$$f'(x) = (1+\alpha)x^\alpha \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x},$$

und für $x < 0$ gilt $f(x) = (-x)^{1+\alpha} \sin \frac{1}{x}$

$$f'(x) = -(1+\alpha)(-x)^\alpha \sin \frac{1}{x} - (-x)^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x}.$$

Wir sehen, dass f' ist stetig, wenn $x \neq 0$ ist. Wenn $\alpha > 1$ ist, zeigt (a), dass die beide Formeln gegen 0 als $x \to 0$ konvergiert. In diesem Fall, ist f' auch in 0 stetig, weil $f'(0) = 0$. Aber für $\alpha = 1$ haben wir

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

$\cos \frac{1}{x}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent als $x \to 0$. Also ist f' nicht stetig in 0. Der Fall $\alpha > 1$ ist relativ gleich wie $\alpha = 1$, aber $x^{\alpha-1} \cos \frac{1}{x}$ ist nun unbeschränkt.

42. Tangens tanzen.

(a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Zeige, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ unter dieser Substituion gebrochen rationale Funktionen von t sind. [Man darf das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) verwenden.] *(3 Punkte)*

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\left|\frac{1+it}{1-it}\right| = 1$. *(1 Punkt)*

(c) Zeige, dass

$$\arctan(t) = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$$

[*Tipp:* Sei $\theta = \arg\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$ und schreib $\frac{1+it}{1-it}$ in Polardarstellung.] *(3 Punkte)*

Lösung.

(a) Zuerst beweisen wir nach Abschnitt 4.4 einige weitere Formeln:

$$\begin{aligned} \tan^2 z &= \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} - 1, \\ \cos z &= \cos\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2} = 2\cos^2 \frac{z}{2} - 1, \\ \sin z &= \sin\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = 2 \sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

Deshalb folgt es

$$t = \tan \frac{x}{2} \qquad t^2 = \tan^2 \frac{x}{2} \qquad t^2 + 1 = \tan^2 \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{t^2+1} = \cos^2 \frac{x}{2}} \qquad \frac{2}{t^2+1} = 2\cos^2 \frac{x}{2} \qquad \frac{2}{t^2+1} - 1 = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

und

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2t \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

(b) Es gilt

$$\left|\frac{1+it}{1-it}\right| = \sqrt{\frac{1+it}{1-it}\cdot\overline{\left(\frac{1+it}{1-it}\right)}} = \sqrt{\frac{1+it}{1-it}\cdot\frac{1-it}{1+it}} = 1.$$

(c) Sei $\theta = \arg\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$. Wegen (b) ist $\frac{1+it}{1-it} = 1e^{i\theta}$. Es folgt

$$\frac{1-t^2+2it}{1+t^2} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta \text{ und } \frac{2t}{1+t^2} = \sin\theta.$$

Sei $s = \tan\frac{\theta}{2}$. Nach (a) folgt

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta = \frac{1-s^2}{1+s^2} \quad \Leftrightarrow \quad (1-t^2)(1+s^2) = (1+t^2)(1-s^2) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = s^2.$$

Also ist $t = \pm s$. Aber wegen $\frac{2t}{1+t^2} = \sin\theta = \frac{2s}{1+s^2}$ muss $t = s$ sein. Deshalb gilt

$$t = s = \tan\frac{\theta}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arctan t = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\arg\left(\frac{1+it}{1-it}\right).$$

43. Die Produktregel für n-te Ableitungen

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-fach differenzierbare Funktionen und $h := f \cdot g : I \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie: h ist n-fach differenzierbar und für die n-te Ableitung $h^{(n)}$ gilt für alle $x \in I$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$$

(mit der Konvention $f^{(0)} := f$). Dabei bezeichnen $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$ die entsprechenden Binomialkoeffizienten. *(5 Bonuspunkte)*

Lösung. I.B. $n = 1$. Seien f, g differenzierbar. Dann ist nach Satz 7.5 fg differenzierbar und

$$(fg)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f^{(1)}g^{(0)} + \binom{1}{1} f^{(0)}g^{(1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

I.V. Für ein $n \in \mathbb{N}$ und für n-fach differenzierbare Funktionen f, g ist fg n-fach differenzierbar und

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x).$$

I.S. Seien f, g $(n+1)$-fach differenzierbar. $(fg)^{(n)}$ ist eine Summe von $f^{(k)}g^{(n-k)}$ mit $k \in \{0, \ldots, n\}$ und sie sind differenzierbar nach Leibnizregel. Deshalb ist $(fg)^{(n)}$ differenzierbar und wir sagen, dass fg ist $(n+1)$-fach differenzierbar.

Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left((f^{(k)})' g^{(n-k)} + f^{(k)} (g^{(n-k)})'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m-1} f^{(m)} g^{(n+1-m)} + f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

Mehr Übungen.

44. Differenzierbarkeit

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $x^* \in (a, b)$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(b) Es sei f in x^* differenzierbar. Wir setzen weiter voraus, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in (a, b) \setminus \{x^*\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ gibt, so dass $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeigen Sie: $f(x^*) = f'(x^*) = 0$. *(3 Punkte)*

Bemerkung: Eine Nullstelle von f, die zugleich Nullstelle von f' ist, bezeichnet man auch als *Nullstelle höherer Ordnung.*

(c) Nun sei f differenzierbar auf $(a, b) \setminus \{x^*\}$ und es existiere ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x^*-} f'(x) = c = \lim_{x\to x^*+} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f dann auch in x^* differenzierbar ist, und zwar mit $f'(x^*) = c$. *(5 Punkte)*

[Tipp: Zu beweisen ist, dass die Funktion $h : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := \frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*}$ für $x \neq x^*$ und $h(x^*) := c$ stetig ist. Dazu zeige man, dass h in x^* linksseitig stetig und rechtsseitig stetig ist, siehe Extra-aufgabe Kontinuität durch Gleichheit von 9. Übungsblatt. Denken Sie auch an den Mittelwertsatz.]

45. Ein Zwischenwertsatz für die Ableitung

Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und f' sei nicht konstant. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\eta \in \mathbb{R}$ mit

$$\inf\{f'(x) : x \in (a, b)\} < \eta < \sup\{f'(x) : x \in (a, b)\}$$

ein $\xi \in (a, b)$ gibt mit $f'(\xi) = \eta$ *(6 Punkte)*

[Tipp und Warnung: Betrachten Sie $g(x) := f(x) - \eta x$ und bedenken Sie, dass f' nicht notwendigerweise stetig zu sein braucht.]

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 4. Dezember 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.