Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

20. November 2020

9. Übung

34. Spielwiese der Stetigkeit.

(a) Man zeige durch unmittelbare Anwendung der (ε, δ)-Definition der Stetigkeit (Definition 5.13), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$$

an der Stelle $x = 2$ stetig ist. *(2 Punkte)*

(b) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. *(3 Punkte)*

(c) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

stetig (beweise man Beispiel 5.19(i)), und auch gleichmäßig stetig ist. *(2 Punkte)*

(d) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

stetig ist. [Tipp. Benutze die Idee von Aufgabe 25 für Stetigkeit in 0] *(3 Punkte)*

(e) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x},$$

von der wir bereits aus Aufgabe 32 "Stetigkeit unter der Erde" wissen, dass sie stetig ist.

(i) Zeigen Sie, dass $f|_{[1,\infty)}$, d.h. die Einschränkung von f auf das Intervall $[1, \infty)$, Lipschitz-stetig ist.

(2 Bonuspunkte)

(ii) Zeigen Sie, dass f auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$ ist. [Tipp: Satz 5.22] *(4 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) Wir müssen zeigen, dass $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ so dass $|f(2) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in \{|2 - y| < \delta\}$ gilt. Bemerke

$$|f(2) - f(y)| = |3 - f(y)| = |4 - y^2| = |2 - y| \cdot |2 + y|,$$

und $\{y \in \mathbb{R} \mid |2-y| < \delta\} = (2-\delta, 2+\delta)$. Wenn $y \in (2-\delta, 2+\delta)$ ist, haben wir dann $4-\delta < 2+y < 4+\delta$. Wenn $\delta < 4$ auch ist, gilt $|2+y| < 4+\delta$ und deshalb

$$|2-y| \cdot |2+y| < \delta \cdot (4+\delta) < 8\delta.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle δ als die kleinere von $\varepsilon/8$ oder 4. Daher ist

$$|f(2) - f(y)| = |2-y| \cdot |2+y| < 8\delta < \varepsilon.$$

Die Eigenschaft gilt, also ist f stetig.

(b) f ist in x nicht stetig $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0\; \forall\, \delta > 0\; \exists\, y \in \{|y-x| < \delta\}$ mit $|f(y) - f(x)| > \varepsilon$. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und δ beliebig.

1. Fall: $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Nach Satz 2.47 existiert ein $y \in \mathbb{Q}$ mit $x - \delta < y < x + \delta$, also $|y - x| < \delta$. Es gilt $f(x) = 0, f(y) = 1$, also $|f(y) - f(x)| = 1 > \varepsilon$.
2. Fall: $x \in \mathbb{Q}$. Nach Satz 2.47 existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\delta) < r < \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\delta)$, und o.B.d.A $r \neq 0$. Also $x - \delta < \sqrt{2}r < x + \delta$. Sei $y := \sqrt{2}r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (wegen $r \neq 0$). Dann ist $|y - x| < \delta$. Es gilt $f(x) = 1, f(y) = 0$, und $|f(y) - f(x)| = 1 > \varepsilon$.

(c) Drei Variante: Nach Korollar 5.15(ii) sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folge gegen x. Dann konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x) = x$. Deshalb ist f stetig.
Nach Korollar 5.15(iii) sei U offen in $Y = \mathbb{R}$. Dann ist das Urbild $f^{-1}[U] = U$ auch offen in $X = \mathbb{R}$. Deshalb ist f stetig.
Nach Korollar 5.15(iv) sei A abgeschlossen in $Y = \mathbb{R}$. Dann ist das Urbild $f^{-1}[A] = A$ auch offen in $X = \mathbb{R}$. Deshalb ist f stetig.
Gleichmäßig-stetig heißt, dass $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$: $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta = \varepsilon$. Sei x und y beliebig mit $|x - y| < \delta$. Dann gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

(d) Wir müssen zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und jede Folge x_n, die gegen x konvergiert, $f(x_n)$ konvergiert gegen $f(x)$. Sei $x < 0$ und $x_n \to x$. Dann gibt es ein N so dass $\forall n > N$ ist $x_n < 0$ auch, denn wir können ϵ klein wählen so dass $(x-\epsilon, x+\epsilon) \subset (-\infty, 0)$. Es folgt, dass $f(x_n) = 0$ konstant ist, so konvergiert gegen $0 = f(x)$.
Ebenfalls sei $x > 0$ und $x_n \to x$. Dann gibt es ein N so dass $\forall n > N$ ist $x_n > 0$ auch, denn wir können ϵ klein wählen so dass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (0, \infty)$. Es folgt, dass $f(x_n) = x_n$ und natürlich gegen $x = f(x)$ konvergiert.
Der letzte Fall ist $x = 0$, so $f(x) = f(0) = 0$. Es gibt zwei Teilfolgen von (x_n): $u_n := \{x_n \geq 0\}$ und $l_n := \{x_n < 0\}$. Bemerke, dass $f(u_n) = u_n \to x = f(0)$ und $f(l_n) = 0 \to 0 = f(0)$. Nach Aufgabe 25 Zweierlei ist $f(0)$ die einzige Häufungspunkt von $\{f(x_n)\}$. Deshalb konvergiert $f(x_n) \to f(x)$.

(e) **(i)** Für $x, y \in [1, \infty)$ gilt $\sqrt{x}, \sqrt{y} \geq 1$, also $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, also

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y| = L|x - y|$$

mit $L := \frac{1}{2}$.

(ii) Da jede lipschitz-stetige Abbildung gleichmäßig-stetig ist, ist $f|_{[1,\infty)}$ gleichmäßig-stetig nach (i). Nach Satz 5.22 ist $f|_{[0,1]}$ gleichmäßig-stetig, da f stetig und $[0,1]$ kompakt.

Zur Nicht-Lipschitz-Stetigkeit: Gibt es ein $L > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \geq 0$? Nein. Sei $L > 0$ beliebig und setze $x := \frac{1}{4L^2}$ und $y = 0$.

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x}| = \frac{1}{2L} = 2L \cdot \frac{1}{4L^2} = 2L \cdot |x - y| > L|x - y|.$$

So ist hier ein Wiederspruch.

35. Quantorendschungel Part II

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Nach Definition 5.20 heißt f *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

Welche der folgenden Aussagen sind *äquivalent* zur gleichmäßigen Stetigkeit von f? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a) $\exists \delta > 0 \; \forall \epsilon > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(2 Punkte)*

(b) $\forall x_0 \in X \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in B(x_0, \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ *(2 Punkte)*
(mit $B(x_0, \delta)$ ist hierbei der Ball in X um x_0 mit Radius δ gemeint, vgl. Definition 5.1)

(c) $\forall \epsilon > 0 \; \exists c > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < c\delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(2 Punkte)*

(d) $\forall \epsilon > 0 \; \exists c > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in X : (\, |x_1 - x_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < c\epsilon)$ *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Es ist nicht äquivalent. Gegenbeispiel: $f(x) = x$. Nach Satz 5.22 oder Aufgabe 34(b) ist f gleichmäßig stetig. (a) gilt nicht, denn: Sei $\delta > 0$ gegeben und wähle $\epsilon = 0.25\delta, x_1 = 0.5\delta, x_2 = 0$. Dann $|x_1 - x_2| = 0.5\delta < \delta$ aber

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| = 0.5\delta \not< 0.25\delta = \epsilon.$$

(b) Es ist nicht äquivalent, aber es ist äquivalent zu normaler Stetigkeit. Sei f stetig, $x_0 \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in B(x_0, \delta)$. Seien $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$. Dann gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

und daher Stetigkeit $\Rightarrow$ (b). Wenn man $x_1 = x_0$ wählt, ist (b) einfach Stetigkeit. Jede stetige Funktion f, die aber nicht gleichmäßig stetig ist, ist ein Gegenbeispiel.

(c) Es ist äquivalent. Wenn f gleichmäßig stetig ist, setze $c = 1$ und dann gilt auch (c). Falls (c) für f gilt, sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta' > 0$, nämlich $\delta' = c\delta$, mit $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ für alle x_1, x_2 mit $|x_1 - x_2| < \delta'$. Das zeigt, dass f gleichmäßig stetig ist.

(d) Es ist nicht äquivalent. Wähle

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Dann ist f offenbar nicht (gleichmäßig) stetig in 0. Aber es gilt (d), denn: Sei $\epsilon > 0$, so wähle $c := 2/\epsilon > 0$. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1 < 2 = c\epsilon.$$

36. Punktweise oder Gleichmäßig.

Wir definieren die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 2n^2 x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 x & \text{falls } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(1 Punkt)*

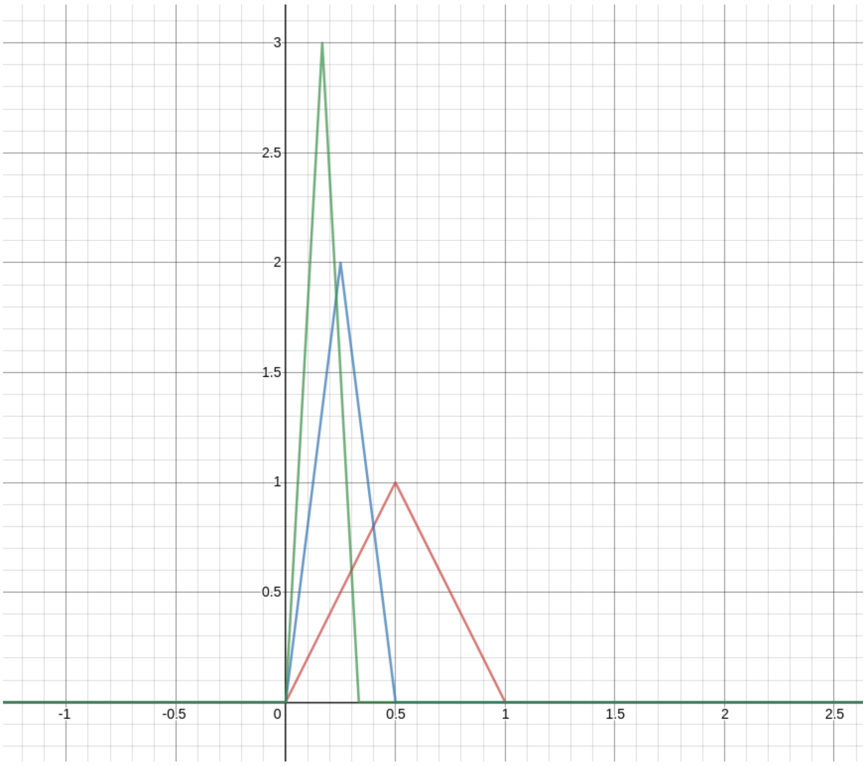
(b) Zeigen Sie, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. *(2 Punkte)*
[Tipp: Aufgabe 34(d).]

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. *(2 Punkte)*

(d) Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist.
[Tipp: Bestimmen Sie zuerst die einzig mögliche Grenzwertfunktion f für den gleichmäßigen Grenzwert der (f_n), und finde sodann für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x \in \mathbb{R}$, so dass $|f_n(x) - f(x)|$ maximal wird.] *(3 Punkte)*

Lösung.

(a)



Auch: https://www.desmos.com/calculator/t9oryfm3mx

(b) Nimm f aus 34(d), aber nenn es g. Bemerke,

$$h_b(x) := g(x-b) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < b, \\ x - b & \text{falls } x \geq b \end{cases}$$

ist stetig nach Korollar 5.16. Man kann

$$f_n(x) = 2n^2\, h_0(x) - 4n^2\, h_{\frac{1}{2n}}(x) + 2n^2\, h_{\frac{1}{n}}(x),$$

schreiben und das zeigt dass f_n auch stetig ist nach Beispiel 5.19.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
Fall 1 $x \notin (0,1)$: Dann $f_n(x) = 0$ für alle $n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
Fall 2 $x \in (0,1)$: Dann gibt es ein N mit $\frac{1}{N} < x$, also $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < x$ für alle $n \geq N$. Für solche n gilt $f_n(x) = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

(d) Wäre (f_n) gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ konvergent, gäbe es für $\epsilon = \frac{1}{2}$ ein N, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ gelten würde. Für $x = \frac{1}{2n}$ gilt aber

$$|f_n(x) - f(x)| = |2n^2 \frac{1}{2n} - 0| = n \geq 1 > \frac{1}{2}.$$

Daher ist (f_n) nicht gleichmäßig konvergent.

37. Die kalte Erde.

Bestimme, mit Polardarstellung, alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden. [Vergleichene mit 16(b). Das Eckige im Runden.] *(3 Punkte)*

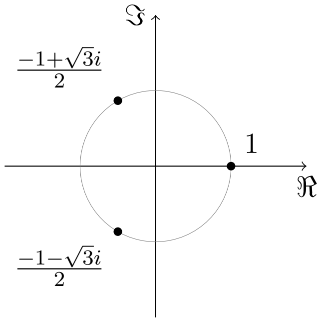
Lösung. Wir wissen $1 = 1e^{0i+2\pi ni}$ für jede $n \in \mathbb{Z}$. Also ist $z = (1e^{2\pi in})^{1/3} = 1e^{\frac{2}{3}\pi in}$. Bemerke, dass

$$\begin{aligned}
\dots = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(-3)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(0)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(3)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(6)} = \dots \\
\dots = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(-2)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(1)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(4)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(7)} = \dots \\
\dots = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(-1)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(2)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(5)} = 1e^{\frac{2}{3}\pi i(8)} = \dots,
\end{aligned}$$

weil z.B. $\frac{2}{3}\pi i(8) - \frac{2}{3}\pi i(5) = 2\pi i$. Deshalb sind drei eindeutige Lösungen $z = e^0, e^{\frac{2}{3}\pi i}, e^{\frac{4}{3}\pi i}$. Nach Eulerschen Formel folgt es

$$\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^{\frac{2}{3}\pi i} &= \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
e^{\frac{4}{3}\pi i} &= \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

und



Man sieht, dass die Winkeln $\frac{2}{3}\pi$ sind.

Mehr Übungen.

38. Kontinuität durch Gleichheit.
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass f in $x_0 \in X$ *linksseitig stetig* (bzw. *rechtsseitig stetig*) ist, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $f_- : X \cap (-\infty, x_0] \to \mathbb{R}$ (bzw. eine in x_0 stetige Funktion $f_+ : X \cap [x_0, \infty) \to \mathbb{R}$) gibt, die auf $X \cap (-\infty, x_0]$ (bzw. auf $X \cap [x_0, \infty)$) mit f übereinstimmt.
Beweise: f ist genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn f in x_0 sowohl linksseitig stetig als auch rechtsseitig stetig ist mit $f(x_0) = f_-(x_0) = f_+(x_0)$.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 27. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.