Martin Schmidt
Ross Ogilvie

# Analysis I

4. Dezember 2020

## 11. Übung

### 43. Ab ins Krankenhaus.

**(a)** Bestimme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(2x)}$. *(2 Punkte)*

**(b)** Zeige: $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ und $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. *(3 Punkte)*

**(c)** Bestimme $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *(1 Punkt)*

**(d)** Bestimme $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$. *(2 Punkte)*

**(e)** Zeige $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ und bestimme $\lim_{x\to 0+}(x \cdot \ln x)$. *(2+2 Punkte)*

**Lösung.**

**(a)** Weil

$$\lim_{x\to 0} \sin(4x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \tan(2x),$$

können wir die Regel von L'Hôpital benutzen. Also

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos(4x)}{2\frac{1}{\cos^2(2x)}} = \lim_{x\to 0} 2\cos(4x)\cos^2(2x) = 2 \times 1 \times 1^2 = 2.$$

ODER:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x)}{\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(2x)\cos(2x)}{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}} = \lim_{x\to 0} 2\cos^2(2x) = 2.$$

**(b)** Seien $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $c > 0$. Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ surjektiv ist (Satz 6.7(iv)) gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $e^b = c$. Weiter gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n > b \Rightarrow e^{x_n} > e^b = c$ für alle $n \geq N$. Das zeigt $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = \infty$ und damit $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Seien $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ und $\epsilon > 0$. Wieder gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $e^b = \epsilon$. Weiter gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n < b \Rightarrow 0 < e^{x_n} < e^b = 0 + \epsilon$ für alle $n \geq N$. Das zeigt $\lim_{n\to\infty} e^{x_n} = 0$ und damit $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

**(c)**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - \lim_{x\to\infty} e^{-2x}}{1 + \lim_{x\to\infty} e^{-2x}}.$$

Sei $y = -2x$. Wenn $x \to \infty$ geht, geht $y \to -\infty$. Daher

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - \lim_{y\to-\infty} e^y}{1 + \lim_{y\to-\infty} e^y} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

**(d)** Bemerke $\frac{\exp(\alpha x)}{x^\beta} = \left(\frac{\exp(\gamma x)}{x}\right)^\beta$ mit $\gamma = \frac{\alpha}{\beta} > 0$. Wir berechnen denn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(\gamma x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\gamma \exp(\gamma x)}{1} = \infty.$$

Weil $z^\beta$ stetig ist, ist auch $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(\alpha x)}{x^\beta} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(\gamma x)}{x}\right)^\beta = \infty$.

**(e)** Wir wissen drei Eigenschaften: $\exp \ln x = x$ (Definition 6.9), exp ist stetig, und ln ist monoton. Daher muss der Grenzwert $L := \lim_{x\to 0+} \ln x$ existiert und $L < \ln 1 = 0$. Falls $L$ endlich ist, gelte

$$\exp L = \exp \lim_{x\to 0+} \ln x = \lim_{x\to 0+} \exp \ln x = \lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Aber exp ist immer positiv. Deshalb muss $L = -\infty$ sein.

ODER: Sei $(y_n) \subset \mathbb{R}^+$ eine Folge mit $\lim y_n = 0$. Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Da $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, gibt es ein $b > 0$ mit $\ln b = c$. da $\lim y_n = 0$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $y_n < b$ für alle $n \geq N$ gilt. Mit der Monotonie von ln folgt $\ln y_n < \ln b = c$. Dies zeigt $\lim \ln y_n = \infty$ und damit $\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty$.

Jetzt zeigen wir $\lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$. Man schreibt

$$\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

**44. Achtung die Kurve!**

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\exp(x)-\exp(3x)}{\exp(4x)-1} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

**(a)** Zeige $f(x) = \frac{-\exp(x)}{\exp(2x)+1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*

**(b)** Untersuche $f$ auf lokale Extrema. Sind diese (falls existent) auch *globale* Extrema? *(3 Punkte)*

**(c)** Untersuche $f$ auf Monotonie und bestimme das Verhalten für $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. *(2 Punkte)*

**(d)** Bestimme den Wertebereich von $f$. *(2 Punkte)*

**Lösung.**

**(a)** Sei $g(x) = \frac{-\exp(x)}{\exp(2x)+1}$. Bemerke für $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\exp(x) - \exp(3x)}{\exp(4x) - 1} = \frac{\exp(x)(1 - \exp(2x))}{(\exp(2x) - 1)(\exp(2x) + 1)} = \frac{-\exp(x)}{\exp(2x) + 1} = g(x),$$

und $g(0) = -\frac{1}{2} = f(0)$. Also $f(x) = g(x)$ für alle $x$.

**(b)**

$$f'(x) = \frac{-e^x(e^{2x} + 1) + e^x \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Lokale Extrema können nur an den Nullstellen der Ableitung besitzen, aber die Nullstellen der Ableitung müssen nicht lokale Extrema sein.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = e^x \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Also könnte $x = 0$ ein Extrema sein. Bemerke, dass $f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^{2x}+1)^2}$. Deshalb ist $f'(x) < 0$ für $x < 0$ und $f'(x) >$ für $x > 0$. Dies zeigt, dass $x = 0$ ein lokal und global Minimum ist.

Oder man kann zeigen:

$$(\exp x - 1)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \exp 2x + 1 \geq 2 \exp x \quad \Rightarrow 1 \geq -2 \cdot \frac{-\exp x}{\exp 2x + 1} \quad \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{-\exp x}{\exp 2x + 1}$$

**(c)** Wir haben schon gezeigt, dass $f$ ist streng monoton steigend für $x > 0$ und streng monoton fallend für $x < 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-\exp(x)}{\exp(2x) + 1} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(-x)}{1 + \exp(-2x)} = -\frac{0}{1+0} = 0$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\exp(x)}{\exp(2x) + 1} = -\frac{0}{0+1} = 0.$$

**(d)** Zusammentragen von allen Bekannten: $[-0.5, 0)$.

## 45. Achtung die Kurve! II

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} \end{aligned}$$

**(a)** Bestimme die Nullstelle(n) von $f$. *(2 Bonuspunkte)*

**(b)** Zeige, dass $f$ unendlich oft differenzierbar ist. *(3 Bonuspunkte)*

**(c)** Untersuche $f$ auf lokale Extrema. Sind diese (falls existent) auch *globale* Extrema? *(2 Bonuspunkte)*

**(d)** Untersuche $f$ auf Monotonie und bestimme das Verhalten für $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. *(3 Bonuspunkte)*

**(e)** Bestimme den Wertebereich von $f$. *(1 Bonuspunkt)*

**Lösung.** Die Aufgabe ist ziemlich leicht, wenn man $f(x) = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1} = e^x - 1$ sieht. Aber benutzen wir das hier nicht.

**(a)**

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

**(b)** Bemerke zuerst, dass $x^{-1}$ unendlich oft differenzierbar für $x \neq 0$ ist. Wenn $g : X \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und nie null ist, beweisen wir, dass $g^{-1}$ ist auch unendlich oft differenzierbar.

Behauptung: $(g^{-1})^{(n)} = G_n\, g^{-1-n}$ für eine unendlich oft differenzierbare Funktion $G_n$.

I.B. $n = 1$: $(g^{-1})' = -g^{-2}g'$ nach der Kettelregel. $G_1 := -g'$ ist unendlich oft differenzierbar.
I.S.

$$\begin{aligned}(g^{-1})^{(n+1)} &= ((g^{-1})^{(n)})' = (G_n g^{-1-n})' \\ &= G_n' g^{-1-n} - (-1-n) G_n g^{-1-n-1} g' \\ &= \left(G_n' g + (1+n) G_n g'\right) g^{-1-n-1}.\end{aligned}$$

Wir sehen: $G_{n+1} = G_n' g + (1+n) G_n g'$ ist auch unendlich oft differenzierbar nach der $n$-fach Produktregel. Diese Induktionbeweis zeigt, dass $g^{-1}$ ist unendlich oft differenzierbar.

Nun wissen wir dass $e^{2x} - 1$ und $(e^x + 1)^{-1}$ unendlich oft differenzierbar sind, und daher ist das Produkt $f$ auch so.

**(c)**

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x+1) - (e^{2x}-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Das ist nie null, also kann $f$ keine Extrema haben.

**(d)** $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb ist $f$ streng monoton steigend.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} e^x \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} e^x \times \frac{1-0}{1+0} = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

**(e)** $(-1, \infty)$.

## 46. Die zwei Wertsätze

**(a)** Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^5 + x^3 + 3x - 3$. Beweise, dass es ein $a \in [0,1]$ mit $p(a) = 0$ gibt. Beweise, dass dies $a$ die einige Lösung von $p(x) = 0$ ist. *(3 Punkte)*

**(b)** Zeige, dass $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. *(2 Punkte)*

**(c)** Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$. Zeige, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ gibt. *(2 Punkte)*

**Lösung.**

**(a)** Bemerke $p(0) = -3$ und $p(1) = 2$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $a \in (0,1)$ mit $p(a) = 0$.

Nehmen wir den Fall an, dass es $a \neq b$ mit $p(a) = p(b) = 0$ gibt. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $c \in (a,b)$ mit

$$p'(c) = \frac{p(b) - p(a)}{b-a} = \frac{0-0}{b-a} = 0.$$

Aber, $p'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 3 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb kann $f$ nur eine Nullstelle haben.

**(b)** Wir benutzen den Mittelwertsatz: es gibt ein $c \in (a,b)$ mit

$$\cos' c = \frac{\cos a - \cos b}{a - b} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\cos a - \cos b|}{|a-b|} = |-\sin c| \leq 1. \quad \Rightarrow \quad |\cos a - \cos b| \leq |a-b|.$$

**(c)** Sei $h(x) = f(x) - g(x)$. Die Ableitung von $h$ ist dann $f' - g' = 0$. Wegen Satz 7.15(i) ist $h$ eine Konstante $c$.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 11. Dezember 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.