Martin Schmidt
Ross Ogilvie

25. September 2020

Analysis I

1. Übung

1. Wohlbekannte Mengen.

(a) Man gebe für die Mengen

$$A := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl} \,\}, \quad B := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade} \,\}$$

ihren Schnitt $A \cap B$, ihre Vereinigung $A \cup B$ sowie die Differenz $A \setminus B$ an. Dabei bezeichnet $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. *(3 Punkte)*

(b) Sei $C = \{0, 1\}$. Man gebe $\mathcal{P}(C)$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$ an. *(2 Punkte)*

(c) Man gebe $\mathcal{P}(\emptyset)$ an. *(1 Punkt)*

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl und } n \text{ ist ungerade} \,\} &&= \{3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\},\\
A \cup B &= \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl oder } n \text{ ist ungerade} \,\} &&= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\},\\
A \setminus B &= \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Primzahl und } n \text{ ist nicht ungerade} \,\} &&= \{2\}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(C) &= \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, C\},\\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(C)) &= \{\ \emptyset,\\
&\qquad \{\emptyset\},\ \{\{0\}\},\ \{\{1\}\},\ \{C\},\\
&\qquad \{\emptyset, \{0\}\},\ \{\emptyset, \{1\}\},\ \{\emptyset, C\},\ \{\{0\}, \{1\}\},\ \{\{0\}, C\},\ \{\{1\}, C\},\\
&\qquad \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\},\ \{\emptyset, \{0\}, C\},\ \{\emptyset, \{1\}, C\},\ \{\{0\}, \{1\}, C\},\\
&\qquad \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, C\}\ \ \}.
\end{aligned}$$

(c) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

2. Gleichheit oder Ungleichheit?

Es seien A, B und C beliebige Mengen. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Falls eine Aussage wahr ist, gebe einen Beweis, falls eine Aussage falsch ist, gebe ein Gegenbeispiel an.

(a) $(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = (C \setminus B) \setminus A$. *(4 Punkte)*

(b) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) "$\subseteq$": Sei $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$. Dann gilt $x \in C \setminus A$ und $x \in C \setminus B$. Wegen $x \in C \setminus A$ gilt $x \notin A$. Aus $x \in C \setminus B$ und $x \notin A$ folgt $x \in (C \setminus B) \setminus A$.
"$\supseteq$": Sei $x \in (C \setminus B) \setminus A$. Dann gilt $x \in C \setminus B$ und $x \notin A$. Aus $x \in C \setminus B$ folgt $x \in C$. $x \in C$ und $x \notin A$ implizieren $X \in C \setminus A$. Aus $x \in C \setminus A$ und $x \in C \setminus B$ folgt $x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

(b) Die Aussage ist falsch! Sei $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}, C = \{1, 2\}$. Dann gilt:

$$A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\},$$
$$(A \cup B) \setminus C = \{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}.$$

3. Wer mit wem in welcher Relation steht.

Man gebe bei den folgenden Relationen R jeweils mit Begründung an, ob R reflexiv, symmetrisch und/oder transitiv ist. Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen?

(a) R sei eine Relation auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, und zwar gelte für $a, b \in \mathbb{R}$:
$(a, b) \in R :\Longleftrightarrow a \leq b$. *(3 Punkte)*

(b) R sei eine Relation auf der Menge M der Teilnehmer der Tutorien zur Analysis I, und zwar gelte für $a, b \in M$:
$(a, b) \in R :\Longleftrightarrow a$ sitzt in demselben Tutorium der Analysis I wie b. *(3 Punkte)*

Lösung.

(a) R ist reflexiv, da für alle $a \in \mathbb{R}$ stets $a \leq a$ gilt.
R ist transitiv, da für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$ also $a \leq c$.
Aber R ist nicht symmetrisch: z.B. gilt $(1, 2) \in \mathbb{R}$, d.h. $1 \leq 2$. Jedoch ist $2 \not\leq 1$, d.h. $(2, 1) \notin R$. Da R nicht symmetrisch ist, ist R keine Äquivalenzrelation.

(b) R ist reflexiv, da jeder im selben Tutorium sitzt wie er/sie selbst.
R ist symmetrisch: Wenn a im selben Tutorium wie b sitzt, sitzt b in selben Tutorium wie a. R ist transitiv: Wenn a im selben Tutorium wie b sitzt und b im selben Tutorium wie c, so sitzt a im selben Tutorium wie c.
R ist eine Äquivalenzrelation.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 02. Oktober 2020, 23:59 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet. Die Email-Adresse von Ihren Tutor finden Sie auf der Kurswebseite.

Falls die Tutorienverteilung am Mittwoch und Donnerstag über das Portal[2] bei Einzelpersonen noch nicht geglückt ist, gibt es die Möglichkeit noch einmal in der Großübung am Freitag darüber zu sprechen.
Außerdem ist die Abgabezeit nur einmalig auf 23:59 Uhr gesetzt. In den folgenden Wochen wird die Abgabezeit auf 10:00 Uhr am Freitag vorgezogen.