Martin Schmidt
Ross Ogilvie

6. November 2020

Analysis I

7. Übung

25. Zweierlei.

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent sind. Sei H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Beweisen Sie, dass $H = \{\lim_{n\to\infty} a_{2n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}\}$ gilt.

[*Bemerkung:* Bei reellen Teilfolgen mit $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \pm\infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \pm\infty$ gilt die Aussage ebenfalls, das brauchen Sie aber nicht zu zeigen.] *(4 Punkte)*

Lösung. Sei H die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_n$.
Beh. $H = \{\lim_{n\to\infty} a_{2n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}\}$.

"$\supseteq$" Weil $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n+1})_n$ konvergente Teilfolgen von $(a_n)_n$ sind, sind ihre Grenzwerte Häufungspunkte von $(a_n)_n$ und somit Elemente von H.

"$\subseteq$" Sei $c \in H$, d.h. c ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Also existiert eine Teilfolge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_n$ mit $\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = c$. Unter den n_m gibt es unendlich viele gerade Zahlen, oder unendlich viele ungerade Zahlen. O.B.d.A. seien unendlich viele der n_m gerade. Das bedeutet: Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_{m_r}})_{r\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$, die zugleich Teilfolge von $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Nun gilt:

$$c = \lim_{m\to\infty} a_{n_m} = \lim_{r\to\infty} a_{n_{m_r}} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} \in \{\lim_{n\to\infty} a_{2n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}\}\ .$$

26. Drei(h)erlei.

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$. (Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden.)

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k-1}}$ *(2 Punkte)*

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^5}$ *(2 Punkte)*

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}$ *(3 Punkte)*

(d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+14k+30}{2k^4+2k^3+k+12}$ *(2 Punkte)*

(e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *(2 Punkte)*

(f) $\sum_{k=101}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *(1 Punkt)*

Lösung.

(a) Es gilt $(a_k)_{k\geq 2} := (\frac{1}{\sqrt{k-1}})_{k\geq 2} = (\frac{1}{\sqrt{m}})_{m\geq 1}$ ist eine Nullfolge (Siehe Kapital 3, Abschnitt 3.4 (ii) für $r = \frac{1}{2}$). Außerdem gilt $a_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}} = a_k$ (Satz 3.10(ii) auch für $r = \frac{1}{2}$). Daher ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Aus dem Satz von Leibniz (4.13) konvergiert die Reihe.

Diese Reihe ist nicht absolut konvergent, denn $\sqrt{k-1} \leq k-1$ für $k \geq 2$. Also gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k-1}} \right| = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-1}} \geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}.$$

Wegen das Majoranten Kriterium (Satz 4.7) ist die Reihe $\sum |a_k|$ nicht konvergent.

(b) Wir benutzen das Wurzelkriterium

$$\sqrt[k]{\left|\frac{5^k}{k^5}\right|} = 5\sqrt[k]{k^{-5}} = 5k^{-5/k} = 5(k^{1/k})^{-5} \to 5(1)^{-5} = 5.$$

Wegen $5 > 1$ sagt das Kriterium, dass die Reihe divergiert.

(c) Man wende auf $a_k = \frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}$ das Wurzelkriterium (Satz 4.9) an. Es gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}} = \sqrt[k]{2} \cdot \frac{k+1}{2k+1}.$$

Es gilt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = 1$ nach Beispiel 3.4(iii), und $\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{2+\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$. Also ist $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2} < 1$, woraus mit Satz 4.9(i) folgt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

ODER

Wir benutzen das Quotienttest

$$\begin{aligned} r := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2((k+1)+1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)^{k+1}} \cdot \frac{(2k+1)^k}{2(k+1)^k} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{2k+3} \cdot \frac{(k+2)^k}{(k+1)^k} \cdot \frac{(2k+1)^k}{(2k+3)^k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{2k+3} \times \lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)^k}{(k+1)^k} \times \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+1)^k}{(2k+3)^k}. \end{aligned}$$

Das erste Limes ist $\frac{1}{2}$. Das zweite ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+2)^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e.$$

Und das dritte ist

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{2}{2k+3}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1.5}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1.5}\right)^{k+1.5} \left(1 - \frac{1}{k+1.5}\right)^{-1.5} = e^{-1},$$

denn

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{e}$$

gilt. Deshalb ist $r = \frac{1}{2} < 1$ und die Reihe konvergiert.

ODER

Bemerke

$$\frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{(k+1)^k}{(k+0.5)^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{(k+0.5+0.5)^k}{(k+0.5)^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \left(1 + \frac{0.5}{k+0.5}\right)^k.$$

Das Grenzwert von $\left(1 + \frac{0.5}{k+0.5}\right)^k$ ist

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{0.5}{k+0.5}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{0.5}{k+0.5}\right)^{k+0.5} \left(1 + \frac{0.5}{k+0.5}\right)^{-0.5} = e^{0.5} \cdot 1 = e^{0.5}.$$

Aber was wichtig ist, ist dass die Folge beschränkt ist, und jede konvergente Folge ist beschränkt. Das heißt, es gibt ein L so dass

$$\left(1 + \frac{0.5}{k+0.5}\right)^k \leq L.$$

Deshalb

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \left(1 + \frac{0.5}{k+0.5}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} L = L \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 4L.$$

Die rechts Seite ist ein endliche Zahl, also die Reihe konvergiert.

(d) Für $k \geq 14$ ist $14k \leq k^2$. Und für $k \geq 6$ ist $30 \leq k^2$. Deshalb ist $k^2 + 14k + 30 \leq 3k^2$ für $k \geq 14$. Andererseits ist $2k^4 + 2k^3 + k + 12 \geq 2k^4$. Daher gilt

$$\frac{k^2 + 14k + 30}{2k^4 + 2k^3 + k + 12} \leq \frac{3k^2}{2k^4} = \frac{3}{2} k^{-2}$$

für $k \geq 14$. Die Reihe $\sum k^{-2}$ konvergiert wegen Cauchy's Verdichtungssatz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(2^k\right)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Daher konvergiert diese Reihe auch.

(e) $k(k+1) \leq (k+1)^2$, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \infty.$$

(f)

$$\sum_{k=101}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} - \sum_{k=0}^{100} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} = \infty - 4.634 = \infty$$

27. Monotonangebend.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Zahlenfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass dann $(n \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(3 Punkte)

[Tipp: Man verwende entweder das Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 4.3) oder Cauchy's Verdichtungssatz (Satz 4.12).]

(b) Bleibt die Aussage von (a) richtig, wenn man auf die Voraussetzung, dass $(a_n)_n$ monoton fallend sein soll, verzichtet? Man gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(2 Zusatzpunkte)

Lösung.

(a) Wenn $n = 2^k$ ist, ist $n \cdot a_n = 2^k a_{2^k}$, wie im Cauchy's Verdichtungssatz. Und wir wissen wegen Cauchy's Verdichtungssatz, dass $\sum 2^k a_{2^k}$ konvergiert. Deshalb ist $(2^k a_{2^k})$ eine Nullfolge. Sei $b_n := 2^k a_{2^k}$, falls $2^k \le n < 2^{k+1}$ ist. (b_n) konvergiert gegen 0 auch. Weil (a_n) monoton fallend ist, gilt

$$0 \le n \cdot a_n \le n \cdot a_{2^k} < 2^{k+1} a_{2^k} = 2b_n.$$

Wegen den Sandwichsatz ist dann $(n \cdot a_n)$ eine Nullfolge.

(b) Die Aussage bleibe nicht richtig, wenn mann auf die Monotonie verzichtet. Gegenbeispiel: Sei

$$d_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n = 2^k \\ \frac{1}{n^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n\neq 2^k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Beide Reihen konvergieren, denn sie sind eine geometrische Reihe und $\zeta(2)$ (und $\zeta(2)$ konvergiert wegen Cauchy's Verdichtungssatz). Also $\sum a_n$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium.

Jedoch ist

$$n \cdot d_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 2^k \\ \frac{1}{n}, & \text{sonst} \end{cases}$$

keine Nullfolge.

28. Bruchlandung.

Beweise, dass die folgende Reihe in $\mathbb{R}$ konvergent ist und berechne ihren Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \,.$$

(3 Punkte)

[Tipp: Man schreibe $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{\alpha}{2k+1} + \frac{\beta}{2k+3}$ mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.]

Lösung. Ansatz:

$$\tfrac{\alpha}{2k+1} + \tfrac{\beta}{2k+3} = \tfrac{\alpha(2k+3)+\beta(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \tfrac{2k(\alpha+\beta)+(3\alpha+\beta)}{(2k+1)(2k+3)} = \tfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}.$$

Deshlab müss $\alpha + \beta = 0$ und $3\alpha + \beta = 1$ gelten. Also $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = -\frac{1}{2}$.

Bemerke

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+6} \right) \\ &= \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{10}\right) + \left(\tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{14}\right) + \left(\tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{18}\right) + \left(\tfrac{1}{18} - \tfrac{1}{22}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{6} - 0\right) + 0 + 0 + 0 + \left(0 - \tfrac{1}{22}\right).\end{aligned}$$

Für all $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k+6} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4(k+1)+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k+2} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{4l+2} \\ &= \left(\frac{1}{6} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k+2} \right) - \left(\sum_{l=2}^{n} \frac{1}{4l+2} + \frac{1}{4(n+1)+2} \right) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4n+6}.\end{aligned}$$

Daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4n+6} \right) = \frac{1}{6}.$$

29. Zone of Danger?

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ *(2 Punkte)*

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!} x^n$ *(2 Punkte)*

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} x^n$ *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Wegen Satz 4.25

$$R = \left(\overline{\lim}\, |a_n|^{1/n} \right)^{-1} = \left(\overline{\lim}\, (2^n)^{1/n} \right)^{-1} = \left(\overline{\lim}\, 2 \right)^{-1} = 2^{-1}.$$

(b)

$$R = \left(\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}\right)^{-1} = \left(\overline{\lim}\,\frac{\sqrt[n]{n}^2}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{-1} = \left(\frac{1^2}{\infty}\right)^{-1} = 0^{-1} = \infty.$$

(c)

$$R = \left(\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}\right)^{-1} = \left(\overline{\lim}\,\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right)^{-1} = \left((1+0)^3\right)^{-1} = 1.$$

Mehr Übungen.

30. Mehrerlei.

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{kn})_{n\in\mathbb{N}}, (a_{kn+1})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_{kn+(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. Sei H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie: $H = \{\lim_{n\to\infty} a_{kn}, \lim_{n\to\infty} a_{kn+1}, \ldots, \lim_{n\to\infty} a_{kn+(k-1)}\}$. [Tipp: Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 25. Der Beweis von Aufgabe 25 mag daher hilfreich sein.]

[*Bemerkung:* Auch hier gilt die analoge Verallgemeinerung aus Aufgabe 25.] *(4 Zusatzpunkte)*

(b) Formulieren Sie eine Verallgemeinerung von (a) für *beliebige* Teilfolgen (einen Beweis müssen Sie nicht angeben). *(2 Zusatzpunkte)*

Lösung.

(a) Sei H die Menge aller Häufungspunkte von $(a_n)_n$.

Beh. $H = \{\lim_{n\to\infty} a_{kn}, \lim_{n\to\infty} a_{kn+1}, \ldots, \lim_{n\to\infty} a_{kn+(k-1)}\}$.

„$\supseteq$“ Weil $(a_{kn})_{n\in\mathbb{N}}, (a_{kn+1})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_{kn+(k-1)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolgen von $(a_n)_n$ sind, sind ihre Grenzwerte Häufungspunkte von $(a_n)_n$ und somit Elemente von H.

„$\subseteq$“ Sei $c \in H$, d.h. c ist ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$. Also existiert eine Teilfolge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_n$ mit $\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = c$. Die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ lassen sich in k disjunkte Teilmengen zerlegen, von denen jede unendlich viele Elemente besitzt, nämlich:

$$N_0 := \{n \geq k : n \text{ ist durch } k \text{ teilbar}\}$$
$$N_1 := \{n \geq k : n-1 \text{ ist durch } k \text{ teilbar}\}$$
$$N_2 := \{n \geq k : n-2 \text{ ist durch } k \text{ teilbar}\} \ldots$$
$$\ldots N_{k-1} := \{n \geq k : n-(k-1) \text{ ist durch } k \text{ teilbar}\}.$$

Es gilt also $\{n \in \mathbb{N} : n \geq k\} = \bigcup_{j=0}^{k-1} N_j$. Es gibt mindestens ein $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, so dass unendlich viele Folgenglieder n_m in N_j liegen. Das bedeutet: Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_{m_r}})_{r\in\mathbb{N}}$ von $(a_{n_m})_m$, die zugleich Teilfolge von $(a_{kn+j})_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Nun gilt:

$$c = \lim_{m\to\infty} a_{n_m} = \lim_{r\to\infty} a_{n_{m_r}} = \lim_{n\to\infty} a_{kn+j} \in \{\lim_{n\to\infty} a_{kn}, \lim_{n\to\infty} a_{kn+1}, \ldots, \lim_{n\to\infty} a_{kn+(k-1)}\},$$

was zu zeigen war.

(b) Seien $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(a_{n_m^{(1)}})_{m\in\mathbb{N}}, \ldots, (a_{n_m^{(k)}})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolgen von $(a_n)_n$ derart, dass jedes Folgenglied a_n in genau einer dieser Teilfolgen vorkommt. Dann ist $\{\lim_{m\to\infty} a_{n_m^{(1)}}, \ldots, \lim_{m\to\infty} a_{n_m^{(k)}}\}$ die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Variante: Seien $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $N_1, \ldots, N_k$ paarweise disjunkte, jeweils unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{k} N_j$. Die Teilfolgen $(a_n)_{n\in N_1}, \ldots, (a_n)_{n\in N_k}$ seien konvergent mit Grenzwerten $c_1, \ldots, c_k$. Dann ist $\{c_1, \ldots, c_k\}$ die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

31. Limes Superior. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkte reelle Zahlenfolgen, deren Menge reeller Häufungspunkte jeweils nicht leer sei.

(a) Belegen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Allgemeinen keinen reellen Häufungspunkt haben muss. *(3 Punkte)*

(b) Beweisen Sie: $\overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$. *(5 Punkte)*

(c) Belegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass $\overline{\lim}(a_n + b_n) = \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$ im Allgemeinen *nicht* gilt. *(3 Zusatzpunkte)*

Lösung.

(a) Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ definiert durch

$$a_n := \begin{cases} -n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}, b_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -n, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ nach oben beschränkt und beide Folgen haben 0 als Limes superior. Es gilt jedoch $a_n + b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ und $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat somit keinen reellen Häufungspunkt.

(b) Sei c ein Häufungspunkt von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Falls $c = -\infty$ (und c der einzige Häufungspunkt ist), ist die behauptete Ungleichung klar, da deren rechte Seite endlich ist. Der Fall $c = \infty$ kann nicht auftreten, da die betrachteten Folgen nach oben beschränkt sind. Sei also $c \in \mathbb{R}$. Also ex. $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ so dass $(a_{n_m} + b_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert. [Beachte: $(a_{n_m})_m$ und $(b_{n_m})_m$ brauchen nicht konvergent zu sein!]

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz 3.21 (i) gilt für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N} : a_n > \overline{\lim}\ a_n + \frac{\varepsilon}{2}$ und $b_n > \overline{\lim}\ b_n + \frac{\varepsilon}{2}$. Es existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $a_n \leq \overline{\lim}\ a_n + \frac{\varepsilon}{2}$ und $b_n \leq \overline{\lim}\ b_n + \frac{\varepsilon}{2}$, also $a_n + b_n \leq \overline{\lim}\ a_n + \frac{\varepsilon}{2} + \overline{\lim}\ b_n + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n + \varepsilon$. Somit folgt auch $c = \lim_{m\to\infty}(a_{n_m} + b_{n_m}) \leq \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n + \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ergibt sich $c \leq \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n$. Da die letztere Abschätzung für jeden Häufungspunkt c von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, also auch für den größten gilt, folgt $\overline{\lim}\ (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n$.

(c) Sei $a_n := (-1)^n, \quad b_n := (-1)^{n+1} = -a_n$. Dann ist nach Aufgabe 25 $\{1, -1\}$ die Menge der Häufungspunkte sowohl von $(a_n)_n$ als auch von $(b_n)_n$, also gilt $\overline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ b_n = 1$.

Andererseits ist $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\overline{\lim}\ (a_n + b_n) = 0 \neq 2 = \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n$.
Variante: Man darf auch mit Teil (a) argumentieren. Mit dem dortigen Gegenbeispiel gilt $\overline{\lim}\ (a_n + b_n) = -\infty \neq 0 = \overline{\lim}\ a_n + \overline{\lim}\ b_n$.

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 13. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.

Kleine Aufgabensammlung.

Diese Aufgabe dient zum Einüben möglicher (insbesondere nicht garantierter!) Typen von Klausuraufgaben aus der Zwischenklausur. Sie wird nicht bewertet und ist rein als Angebot zur Selbstkontrolle zu verstehen. Die Länge dieser Aufgabe lässt auch keine Rückschlüsse auf die Länge der Klausur zu. Bitte beachte auch insbesondere die gewerteten Aufgaben dieses Übungszettels.

1. Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $\Im(z^2) = 2$ erfüllen, und skizziere die Lösungsmenge.

2. Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

3. Wir betrachten die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}\,.$$

(a) Zeige, dass f streng monoton wachsend ist.

(b) Bestimme Supremum und Infimum der Menge $\{\, f(n) \,|\, n \in \mathbb{N} \}$ und untersuche, ob diese Menge ein Maximum und/oder ein Minimum besitzt.

4. Man bestimme für die folgenden Folgen alle ihre Häufungspunkte, und untersuche, ob sie in $\mathbb{K}$ konvergieren.

(a) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(b) $c_n := (1 - \frac{1}{n})^n$

(c) $d_n := (1 + \imath^n) \cdot \frac{6n+7}{3n+2}$

5. Beweise: Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

6. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Zahlenfolgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern voneinander unterscheiden, d.h. für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = b_n$. Zeige, dass dann (a_n) genau dann in $\mathbb{K}$ konvergiert, wenn (b_n) in $\mathbb{K}$ konvergiert, und dass im Falle der Konvergenz die Grenzwerte dieser beiden Folgen übereinstimmen.

7. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Zahlenfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$b_n := \sup\{\, a_k \,|\, k \geq n \,\}$$

definierte Folge. Zeige:

(a) Die Folge (b_n) ist eine reelle Zahlenfolge, sie ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

(b) Die Folge (b_n) ist in $\mathbb{R}$ konvergent, und zwar gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim}\, a_n$.