Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

2. Oktober 2020

2. Übung

4. Abbildungen zum Warmwerden.

Seien $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{7, 8\}$.

(a) Seien $f, g : M \to N$ mit

$$f(1) = 7,\ f(2) = 8,\ f(3) = 7,$$
$$g(1) = 8,\ g(2) = 8,\ g(3) = 8,$$

und $x, y : N \to M$ mit

$$x(7) = 3,\ x(8) = 1$$
$$y(7) = 3,\ y(8) = 3.$$

Untersuchen Sie, ob diese Abbildungen injecktiv, surjektiv oder bijektiv sein. *(4 Punkte)*

(b) Gebe (ohne Beweis) alle bijektiven Abbildungen $f : M \to M$ an.

(2 Punkte)

(c) Man gebe eine Menge M und zwei Abbildungen $f, g : M \to M$ an, so dass

$$f \circ g \neq g \circ f$$

gilt. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) f ist surjektiv, g ist weder injektiv noch surjektiv, x ist injektiv, und y ist auch weder injektiv noch surjektiv.

(b) Es gibt sechs bijektive Abbildungen:

$$f_1(1) = 1,\ f_1(2) = 2,\ f_1(3) = 3,$$
$$f_2(1) = 1,\ f_2(2) = 3,\ f_2(3) = 2,$$
$$f_3(1) = 2,\ f_3(2) = 1,\ f_3(3) = 3,$$
$$f_4(1) = 2,\ f_4(2) = 3,\ f_4(3) = 1,$$
$$f_5(1) = 3,\ f_5(2) = 1,\ f_5(3) = 2,$$
$$f_6(1) = 3,\ f_6(2) = 2,\ f_6(3) = 1.$$

(c) $(f_2 \circ f_3)(1) = f_2(f_3(1)) = f_2(2) = 3$, aber $(f_3 \circ f_2)(1) = f_3(f_2(1)) = f_3(1) = 2$. Deswegen $f_2 \circ f_3 \neq f_3 \circ f_2$.

5. Injektionen und Surjektionen.

Seien $f : M \to L$ und $g : L \to K$ Abbildungen zwischen den Mengen M und L, bzw. L und K. Zeige:

(a) Ist die Verkettung $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv. *(3 Punkte)*

(b) Ist die Verkettung $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv. *(3 Punkte)*

Lösung.

(a) Sei $k \in K$ beliebig. $g \circ f$ surjektiv bedeutet nach Definition: Für jedes $k \in K$, gibt es ein $m \in M$ so dass $g \circ f(m) = k$. Sei $l = f(m) \in L$. Dann gibt

$$g(l) = g(f(m)) = g \circ f(m) = k.$$

Deswegen folgt, dass g surjektiv ist.

(b) $g \circ f$ injektiv bedeutet: $\forall m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \neq m_2$ folgt $g \circ f(m_1) \neq g \circ f(m_2)$. Angenommen nun, f sei nicht injektiv, dann existieren zwei Elemente $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1 \neq m_2$ aber $f(m_1) = f(m_2)$. Sei $l = f(m_1) = f(m_2) \in L$. Dann

$$g \circ f(m_1) = g(f(m_1)) = g(l) = g(f(m_2)) = g \circ f(m_2),$$

und so kann $g \circ f$ nicht injektiv sein. Das ist ein Widerspruch, deswegen muss f injektiv sein.

6. Links- und Rechtsinversen. Sei $f : X \to Y$ eine Allbildung. Die identische Abbildung $\mathbb{1}_X : X \to X$ ist die Funktion mit $\mathbb{1}_X(x) = x$. Beweise:

(a) Es gibt eine Abbildung $h : Y \to X$ so dass $f \circ h = \mathbb{1}_Y$ genau dann, wenn f surjektiv ist. *(4 Punkte)*

(b) Es gibt eine Abbildung $g : Y \to X$ so dass $g \circ f = \mathbb{1}_X$ genau dann, wenn f injektiv ist. *(4 Punkte)*

Lösung.

(a) "$\Leftarrow$": Sei f surjektiv. Für jedes $y \in Y$ gibt es ein Element $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wenn es mehrere solche Elemente existieren, wählen Sie eins. Sei dann $h(y) = x$. Es gilt $f \circ h(y) = f(h(y)) = f(x) = y$.
"$\Rightarrow$": Seien h so dass $f \circ h = \mathbb{1}_Y$ und $y \in Y$. Dann ist $x := h(y) \in X$ und $f(x) = f(h(y)) = y$. Das zeigt, dass f surjektiv ist.

(b) "$\Leftarrow$": Sei f injektiv. Für jedes $y \in Y$ ist das Urbild $f^{-1}[\{y\}]$ leer oder es besteht nur aus einem Element x. Wenn x existiert, dann gilt $g(y) = x$. Das heißt $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$. Wenn es kein solches Element gibt, kann dann man den Wert $g(y)$ frei wählen.

“$\Rightarrow$”: Seien g so dass $g \circ f = \mathbb{1}_X$ und f nicht injektiv. Es gibt verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2) = y$. Aber

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(y) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Das ist ein Widerspruch, und deshalb muss f injektiv sein.

7. (Nicht-)braves Verhalten von Bildern.

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen den Mengen X und Y und seien A und B Teilmengen von X.

(a) Beweise: $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$. *(4 Punkte)*

(b) Belege durch ein Beispiel, dass die Aussage $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ im Allgemeinen *nicht* gilt. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) „$\subseteq$“ Sei $y \in f[A \cup B]$. Also existiert $x \in A \cup B$ mit $f(x) = y$. Es gilt $x \in A$ oder $x \in B$. Ist $x \in A$, so ist $y = f(x) \in f[A]$. Ist $x \in B$, so ist $y = f(x) \in f[B]$. In jedem Falle ist daher $y \in f[A] \cup f[B]$.

„$\supseteq$“ Sei $y \in f[A] \cup f[B]$. Also gilt $y \in f[A]$ oder $y \in f[B]$. Ist $y \in f[A]$, so existiert ein $x \in A$ mit $f(x) = y$; ist $y \in f[B]$, so existiert ein $x \in B$ mit $f(x) = y$. In jedem Falle existiert also ein $x \in A \cup B$ mit $f(x) = y$; daher ist $y \in f[A \cup B]$.

(b) Sei $X := Y := \{1, 2, 3\}$, $A := \{1, 2\}$, $B := \{2, 3\}$, und die Abbildung $f : X \to Y$ definiert durch

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2 \quad \text{und} \quad f(3) = 1\,.$$

Dann ist $A \cap B = \{2\}$ und somit $f[A \cap B] = \{f(2)\} = \{2\}$, jedoch andererseits $f[A] = \{f(1), f(2)\} = \{1, 2\}$ und $f[B] = \{f(2), f(3)\} = \{2, 1\}$ und somit $f[A] \cap f[B] = \{1, 2\} \neq \{2\} = f[A \cap B]$.

Mehr Übungen.

8. (Nicht-)braves Verhalten von Bildern.
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen den Mengen X und Y und seien A und B Teilmengen von X.

(c) Nun sei f zusätzlich als injektiv auf X vorausgesetzt. Zeige, dass in diesem Fall die Aussage aus (b) gilt, d.h. $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$. *(5 Punkte)*

Lösung.

(c) „$\subseteq$" Sei $y \in f[A \cap B]$. Also existiert ein $x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$. Da $x \in A$ und $x \in B$, gilt $y \in f[A]$ und $y \in f[B]$, folglich $y \in f[A] \cap f[B]$.
„$\supseteq$" Sei umgekehrt $y \in f[A] \cap f[B]$, also $y \in f[A]$ und $y \in f[B]$. Daher gibt es ein $x_1 \in A$ mit $f(x_1) = y$ und ein $x_2 \in B$ mit $f(x_2) = y$, also $f(x_1) = y = f(x_2)$. Da f nach Voraussetzung injektiv ist, folgt $x_1 = x_2$. Da $x_1 \in A$ und zugleich $x_1 (= x_2) \in B$, gilt $x_1 \in A \cap B$ und folglich $y \in f[A \cap B]$, da $y = f(x_1)$.

9. Braves Verhalten von Urbildern.
Gegeben seien die Mengen X, Y und $A \subseteq X$. Ferner sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren die Abbildung $g : A \to Y$ durch $g := f|_A$, d.h. $g(x) := f(x)$ für alle $x \in A$.
Zeige, dass für jede Teilmenge B von Y

$$g^{-1}[B] = A \cap f^{-1}[B]$$

gilt. *(4 Punkte)*

Lösung.
„$\subseteq$" Sei $x \in g^{-1}[B]$ beliebig, d.h. $g(x) \in B$. Sowieso gilt $x \in A$, da A der Definitionsbereich von g ist. Es folgt also mit der Definition von g:
$x \in A$ und $g(x) = f(x) \in B$, also $x \in A$ und $x \in f^{-1}[B]$. Dies zeigt $x \in A \cap f^{-1}[B]$ und somit $g^{-1}[B] \subseteq A \cap f^{-1}[B]$.
„$\supseteq$" Sei umgekehrt $x \in A \cap f^{-1}[B]$ beliebig. Es gilt also $x \in A$ und $x \in f^{-1}[B]$. Gemäß Definition von g folgt $x \in A$ und $g(x) = f(x) \in B$, und somit $x \in g^{-1}[B]$. Dies zeigt $A \cap f^{-1}[B] \subseteq g^{-1}[B]$.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 9. Oktober 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.