Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

30. Oktober 2020

6. Übung

21. Quantorendschungel.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder Gegenbeispiel.

(a) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{1}{\varepsilon}$. *(2 Punkte)*

(b) $\exists c > 0 \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - a| < c\varepsilon$. *(2 Punkte)*

(c) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists c > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - a| < c\varepsilon$. *(2 Punkte)*

(d) $\forall \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$. *(2 Punkte)*

Lösung.

Erinnerung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$.

(a) Richtig! Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist auch $1/\varepsilon > 0$. Also, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq N$. Das ist (a).
Sei nun (a) gültig und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so setzt man $\tilde{\varepsilon} := 1/\varepsilon > 0$. Wegen (a) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N : |a_n - a| < 1/\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(b) Richtig! Falls (a_n) gegen a konvergiert, gilt (b) mit $c = 1$. Gilt umgekehrt (b) für die Folge (a_n) und ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es zu $\tilde{\varepsilon} := \epsilon/c > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < c\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also konvergiert (a_n) gegen a.

(c) Falsch! Gegenbeispiel: Sei $a_n := (-1)^n$. Dann ist (a_n) nicht konvergent. Jedoch ist Bedingung (c) mit $a = 0$ erfüllt: es sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Setzt man $c := 2/\varepsilon$, so gilt

$$|a_n - a| = |(-1)^n - 0| = 1 < 2 = c\varepsilon$$

für alle $n \geq 1 =: N$.

(d) Falsch! Gegenbeispiel: es sei $a_n = 1/n$. Dann konvergiert (a_n) gegen $a = 0$, aber die Bedingung (d) ist verletzt: Für $\varepsilon = 0.5$ und $N = n = 1$ gilt

$$|a_n - a| = |a_1 - a| = 1 > \varepsilon.$$

22. Double or Nothing.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$a_n := \frac{n^k}{2^n} \tag{1}$$

eine Nullfolge ist.

(a) Es folgt von dem Binomische Formel 3.24, dass $2^n \geq \binom{n}{k+1}$ für $k+1 \leq n$. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$$\frac{n^k}{2^n} \leq \frac{(k+1)!}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

für alle $n \geq N$ gilt. *(3 Punkte)*

(b) Zeige, durch vollständige Induktion zusammen mit die Grenzwertsätze, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)} = 0.$$

(3 Punkte)

(c) Kombiniere (a) und (b) um die Aussage zu zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}
2^n \geq \binom{n}{k+1} &= \frac{1}{(k+1)!} n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k+1)+1) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k) \\
\frac{2^n}{n^k} &\geq \frac{1}{(k+1)!} n\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right) \\
\frac{n^k}{2^n} &\leq \frac{(k+1)!}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

(b) I.A.: $m=1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) \times \frac{1}{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 0 \times \frac{1}{1-0} = 0.$$

I.V.: Die Behauptung stimmt für ein $m \in \mathbb{N}$.
I.S.:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m}{n}\right)} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{m+1}{n}} \\
&= 0 \times \frac{1}{1-(m+1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 0 \times 1 = 0.
\end{aligned}$$

(c) Sei

$$b_n := \frac{(k+1)!}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)}.$$

Wir wissen nach (b), dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, weil $(k+1)!$ konstant ist. Nach (a) wissen wir auch, dass $0 \leq a_n \leq b_n$. Dann folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ wegen Satz 3.5(vi).

23. Unnötig.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen ein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert. Zeige, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

ebenfalls gegen a konvergiert. *(4 Punkte)*

(b) Man gebe ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, bei dem die wie in (a) definierte Folge (b_n) konvergiert. *(2 Punkte)*

(c) Gibt es eine divergente reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $a_n \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft, dass die in (a) definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? *(4 Punkte)*

Lösung.

(a) Zuerst gilt

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left|\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - a\right| = \frac{1}{n}\left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - a)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - a| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n}|a_k - a|
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq n_0 < n$ wegen die Dreieckeungleichung. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es ist genug zu zeigen, dass es ein N gibt, so dass für alle $n > N$ beide Terme sind weniger als $\frac{1}{2}\varepsilon$. Nach Voraussetzung gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $|a_k - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $k \geq K + 1$. Daher ist

$$\frac{1}{n}\sum_{k=K+1}^{n}|a_k - a| < \frac{1}{n}\sum_{k=K+1}^{n}\frac{1}{2}\varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Es folgt nach Satz 3.5(iii), dass ein $\tilde{N}$ existiert mit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}|a_k - a| < \frac{1}{2}\varepsilon \qquad \forall n > \tilde{N},$$

weil die Summe konstant in n ist. Seien $N = \max\{\tilde{N}, K + 1\}$ und $n_0 = K$. Für alle $n > N$:

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}|a_k - a| + \frac{1}{n}\sum_{k=K+1}^{n}|a_k - a| \\
&< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(b) Sei $a_n = (-1)^n$. Es ist nach Satz 3.4(v) divergent. Es gilt aber

$$b_n = \frac{1}{n}\Big((-1) + 1 + (-1) + \cdots + (-1)^n\Big) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{n} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wegen $-\frac{1}{n} \leq b_n \leq 0$ ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergent.

(c) Wir definieren

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2^m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad a_n = 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

Bemerke, $a_n \geq 0$ und (a_n) nicht konvergiert ist. Dann

$$b_n = \frac{1}{n}(1 + \cdots + a_n) = \frac{1}{n}(1 + \cdots + a_{2^{k-1}}) = \frac{k}{n} \leq \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{k}{2^{k-1}}$$

für $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Sei

$$c_n := \frac{k}{2^{k-1}} \text{ für } 2^{k-1} \leq n < 2^k.$$

(c_n) ist eine oben beschränkte Folge von (b_n) und eine Nullfolge wegen “Double or Nothing”. Deshalb ist (b_n) auch eine Nullfolge.

24. In einem Land vor unserer Zeit.

Bereits vor 4000 Jahren war den Sumerern ein Iterationsprozess bekannt, der bei Eingabe einer Zahl $a > 0$ eine Näherung für $\sqrt{a}$ liefert. Wir formulieren diesen hier speziell für $a = 2$ (also zur Näherung an $\sqrt{2}$): Dazu definieren wir eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \; : \; x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) .$$

(a) Mithilfe eines (Taschen-)Rechners berechne man x_1, x_2, x_3 und x_4. Sieht man daran schon, wie sich die x_n an $\sqrt{2}$ annähern? *(2 Punkte)*

Wir schreiben im Folgenden die x_n als Brüche, d.h. wir schreiben $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ und den Startwerten $p_0 := 3$ und $q_0 := 2$.

(b) Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ und $q_{n+1} = 2p_nq_n$. *(2 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass $p_{n+1} - \sqrt{2}q_{n+1} = (p_n - \sqrt{2}q_n)^2$ und somit $x_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(2 Punkte)*

(d) Warum kann in der letzten Ungleichung keine Gleichheit gelten? *(1 Punkte)*

(e) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge ist. Warum muss sie konvergieren? *(2 Punkte)*

(f) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert.

(3 Punkte)

(g) Man zeige $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2$ und folgere hieraus durch vollständige Induktion, dass $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(2 Bonuspunkte)*

(h) Man folgere aus (c) und (g), dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left|\tfrac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q_n^2}$$ *(3 Bonuspunkte)*

(i) Zeigen Sie mit Hilfe von (g) und (f), dass

$$\lim_{n\to\infty} q_n^2 \left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

gilt und folgern Sie mit (h), dass $c := \frac{1}{2\sqrt{2}}$ die kleinste (und somit bestmögliche) Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist, so dass

$$\left|\tfrac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| < c \cdot \frac{1}{q_n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(3 Bonuspunkte)*

Lösung.

(a) Man rechnet aus (nur x_n war in der aufgabenstellung gefragt):

n	x_n	p_n	q_n	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q_n^2}$
0	1,5	3	2	$9 \cdot 10^{-2}$
1	$1{,}41\dot{6}$	17	12	$2 \cdot 10^{-3}$
2	1,4142156...	577	408	$2 \cdot 10^{-6}$
3	1,4142135...	665857	470832	$2 \cdot 10^{-12}$
4	1,4142135...	886731088897	627013566048	$9 \cdot 10^{-25}$

Zum Vergleich: $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$. Man sieht sehr gut, wie schnell die x_n an $\sqrt{2}$ annähern.

(b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n} + \frac{2q_n}{p_n}\right) = \frac{p_n^2 + 2q_n^2}{2p_nq_n}.$$

Also erfüllt $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2, q_{n+1} = 2p_nq_n$ die Bedingungen.

(c) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$p_{n+1} - \sqrt{2}q_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2 - 2\sqrt{2}p_nq_n = (p_n - \sqrt{2}q_n)^2 \geq 0,$$

also $p_{n+1} \geq \sqrt{2}q_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

(d) Wäre $p_{n+1} = \sqrt{2}q_{n+1}$, so wäre $\sqrt{2} = p_{n+1}/q_{n+1} \in \mathbb{Q}$, im Widerspruch zu Lemma 2.49. Also ist $x_{n+1} > \sqrt{2}$.

(e) "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein streng monoton fallende Folge" heißt, dass $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - x_n = \frac{2 - x_n^2}{2x_n} < 0,$$

weil nach (c) $x^n > 2$ ist. Wegen Satz 3.8 (Monotonieprinzip) konvergiert (x_n).

(f) Sei $x = \lim_{n\to\infty}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) &\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) &\Rightarrow\\
\lim_{n\to\infty} x_n &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{2}{\lim_{n\to\infty} x_n}\right) &\Rightarrow\quad x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) &\Rightarrow\\
x^2 - 2 &= 0 &\Rightarrow\quad (x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) &= 0.
\end{aligned}$$

Also könnte $x = \sqrt{2}$ oder $-\sqrt{2}$ sein. Aber $x_n \geq \sqrt{2}$ und wegen Satz 3.5(vi) ist auch $x \geq \sqrt{2}$. Deshalb $x = \sqrt{2}$.

ODER

Beachten Sie $x_n - \sqrt{2} = \frac{1}{q_n}(p_n - \sqrt{2}q_n)$. Es gilt durch iteriertes Anwenden von (c) für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$p_n - \sqrt{2}q_n = (p_{n-1} - \sqrt{2}q_{n-1})^2 = ((p_{n-2} - \sqrt{2}q_{n-2})^2)^2 = \cdots = (p_0 - \sqrt{2}q_0)^{2^n} = (3 - 2\sqrt{2})^{2^n}.$$

Wir behaupten, dass $0 < 3 - 2\sqrt{2} < 1$ gilt:

$$2 > 1 \Rightarrow \sqrt{2} > 1 \Rightarrow -2\sqrt{2} < -2 \Rightarrow 3 - 2\sqrt{2} < 3 - 2 = 1,$$

und

$$2 < \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow 0 < 3 - 2\sqrt{2}.$$

Mit Satz 3.4(i) folgt $(3 - 2\sqrt{2})^m \to 0$ für $m \to \infty$. $(p_n - \sqrt{2}q_n)$ ist ein Teilfolge von $((3 - 2\sqrt{2})^m)$, deshalb konvergiert es auch gegen 0. Weil $p_n \in \mathbb{N}$, ist $q_{n+1} = 2p_nq_n \geq 2q_n$. Also $q_n \geq 2^{n+1}$ folgt durch Induktion. Daher $0 \leq \frac{1}{q_n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ und $\frac{1}{q_n} \to 0$ für $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - \sqrt{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n} \times \lim_{n\to\infty}(p_n - \sqrt{2}q_n) = 0 \times 0 = 0.$$

(g) Es gilt

$$p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 + 2q_n^2)^2 - 2(2p_nq_n)^2 = p_n^4 + 4p_n^2q_n^2 + 4q_n^4 - 8p_n^2q_n^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2.$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion die Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; p_n^2 - 2q_n^2 = 1$. Es ist $p_0 = 3$ und $q_0 = 2$, also $p_0^2 - 2q_0^2 = 9 - 8 = 1$. Es gelte füt ein bestimmtes, fests $n \in \mathbb{N}: \; p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ (I.V.). dann ist

$$p_{n+1}^2 - 2q_{n+1} = (p_n^2 - 2q_n^2)^2 = 1^2 = 1.$$

(h) Es gilt

$$\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} = \frac{\left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{2}\right)}{\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{2}} = \frac{\frac{p_n^2}{q_n^2} - 2}{\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{2}}.$$

Nach (e) ist $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$, also $\frac{p_n^2}{q_n^2} - 2 = \frac{1}{q_n^2}$, und nach (c) ist $p_n > \sqrt{2}q_n$, also $\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{2} > 2\sqrt{2}$. Also gilt

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q_n^2}.$$

(i) Es gilt $q_n^2(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2})(\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{2}) = p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ und daher mit (f)

$$q_n^2\left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{\frac{p_n}{q_n} + \sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ für } n \to \infty.$$

Sei nun $c \in \mathbb{R}$, so dass $\left|\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right| < c \cdot \frac{1}{q_n^2}$ gilt. Dann folgt mit Satz 3.5(vi)

$$c \geq \lim_{n\to\infty} q_n^2\left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Es muss also $c \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ gelten. Mit Aufgabe (f) ist der minimale Wert $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ wählbar.

Mehr Übungen.

25. Bernoulli Ultimate.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$a_n := \frac{n^k}{2^n} \tag{2}$$

eine Nullfolge ist.

(a) Zeige, dass es einen Index $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit der Eigenschaft:

$$\frac{n^k}{2^n} \le \frac{(n-1)^k}{2^{n-1}}$$

für alle $n \ge N_0$. [*Tipp:* Bernoulli-Ungleichung] *(5 Punkte)*

(b) Zeige durch vollständige Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((k+1)n)^k}{2^{n(k+1)}} \to 0.$$

[*Tipp:* auch hier kann Bernoulli an einer Stelle nützlich sein, benutze ausserdem die Grenzwertsätze.] *(3 Punkte)*

(c) Kombiniere (a) und (b) um die Aussage zu zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. [*Tipp:* (b) zeigt, dass eine Teilfolge von (2) eine Nullfolge ist.] *(2 Punkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 6. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.