Martin Schmidt
Ross Ogilvie

23. Oktober 2020

Analysis I

5. Übung

16. Das Eckige im Runden.

(a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$ *(2 Punkte)*

(ii) $\frac{3+i}{4-i}$ *(2 Punkte)*

(iii) $\frac{(1+2i)^3-(1+i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ *(3 Punkte)*

(b) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden.
[Tipp: $z^3 - 1 = (z-1) \cdot (z^2 + z + 1)$.] *(3 Punkte)*

Lösung.

(a) **(i)**

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i.$$

(ii)

$$\frac{3+i}{4-i} = \frac{3+i}{4-i} \times \frac{4+i}{4+i} = \frac{12+7i+i^2}{16-i^2} = \frac{11+7i}{17} = \frac{11}{17} + \frac{7}{17}i.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\frac{(1+2i)^3-(1+i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} &= \frac{(1+6i+12i^2+8i^3)-(1+3i+3i^2+i^3)}{(27+54i+36i^2+8i^3)-(4+4i+i^2)} \\
&= \frac{1+6i-12-8i-(1+3i-3-i)}{(27+54i-36-8i)-(4+4i-1)} \\
&= \frac{-9-4i}{-12+42i} = \frac{9+4i}{12-42i} \\
&= \frac{9+4i}{12-42i} \times \frac{12+42i}{12+42i} = \frac{108+(9\times 42+4\times 12)i+168i^2}{12^2+42^2} \\
&= \frac{-60+426i}{1908} = \frac{-5}{159} + \frac{71}{318}i.
\end{aligned}$$

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

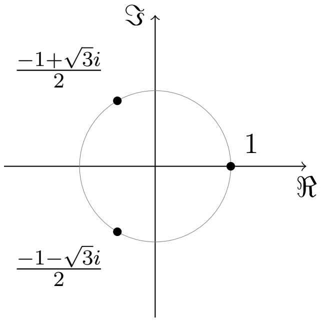
$$\begin{aligned}
& z^3 = 1 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) \\
\Leftrightarrow\ & z - 1 = 0 \text{ oder } z^2 + z + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z = 1 \text{ oder } z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ oder } z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}$$

Nach zu zeigen: Diese Lösungen haben paarweise die gleichen Abstand.

$$\left|\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} - 1\right| = \left|\frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = \sqrt{3},$$

$$\left|\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right| = \left|\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3}.$$

(c)



17. Runde Sache.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Gleichung

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

genau dann keine reelle Lösungen hat, wenn $|a| < 1$. Zeige außerdem, dass in diesem Fall die Gleichung zwei komplex konjugierte Lösungen hat, die in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ liegen. [*Tipp:* Benutze die quadratische Ergänzung.] *(4 Punkte)*

Lösung. Die quadratische Ergänzung:

$$z^2 + 2az + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + 2az + a^2 = a^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (z + a)^2 = a^2 - 1 \quad \Leftrightarrow$$
$$z + a = \pm\sqrt{a^2 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad z = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}.$$

Wenn $|a| \geq 1$ ist, folgt $a^2 - 1 \geq 0$ und deshalb ist $\sqrt{a^2 - 1} \in \mathbb{R}$. Wenn $|a| \geq 1$ ist, ist $\sqrt{a^2 - 1} \in i\mathbb{R}$. In diesem Fall,

$$\overline{-a + i\sqrt{1 - a^2}} = -a - i\sqrt{1 - a^2},$$

und

$$\left|-a + i\sqrt{1 - a^2}\right|^2 = a^2 + (1 - a^2) = 1.$$

18. Kunstkurs.

Beschreibe die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene, indem Sie die Mengen vorher geeignet umformen:

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ *(2 Punkte)*

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < |z + 2|\}$ *(3 Punkte)*

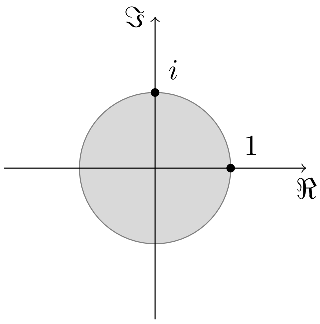
(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : \Im((1 + i)z) \geq 1\}$ *(3 Punkte)*

Lösung.

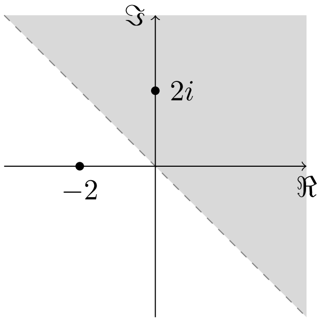
(a) Für $z = x + yi$ gilt $|z|^2 = x^2 + y^2$. Also:

$$|z| \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 \leq 1.$$

A ist die (abgeschlossene) Kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 und Radius 1.



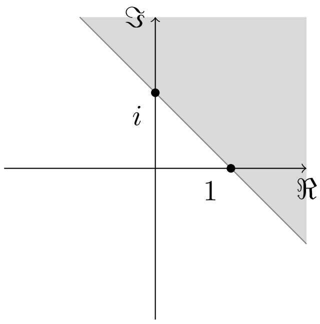
(b) B is die Menge von Punkten, die näher an $2i$ als an -2 liegen. Die Punkte, die genauso nähe an $2i$ wie -2 ligen, sind die Linie $y = -x$.



Alternativ berechnet man

$$|z - 2i| < |z + 2| \;\Leftrightarrow\; |x + yi - 2i|^2 < |x + yi + 2|^2 \;\Leftrightarrow\; -4y < 4x \;\Leftrightarrow\; y > -x$$

(c) $\Im((1 + i)(x + yi)) = \Im(x - y + (x + y)i) = x + y$. Also liegt $z = x + yi \in C$ genauso wenn $x + y \geq 1$.



19. Unwahre Umkehrungen.

(a) Untersuchen Sie die im Folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ *(2 Punkte)*

(ii) $b_n := \frac{1+n^2}{2+3n+n^2}$ *(2 Punkte)*

(iii) $c_n := \frac{2^n+3^n}{5^n}$ *(2 Punkte)*

(b) Man finde jeweils ein Beispiel für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ggf. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften, und zeige, dass das Beispiel tatsächlich die Eigenschaften besitzt.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt, aber es gilt nicht $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *(1 Punkt)*

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. *(1 Punkt)*

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Zahl ist. *(1 Punkt)*

(iv) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) (i) Wegen $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$, folgt

$$0 = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Deshalb ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1+n^2}{2+3n+n^2} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{\frac{1}{n^2}+1}{\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}+1} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty} 1} = \frac{0+1}{0+0+1} = 1.$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \tfrac{2^n+3^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \Big((2/5)^n + (3/5)^n\Big) = \lim_{n\to\infty} (2/5)^n + \lim_{n\to\infty} (3/5)^n = 0 + 0.$$

(b) (i) Sei

$$a_n := \begin{cases} 7 & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ n & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Diese Folge ist unbeschränkt, denn für jedes $b \in \mathbb{R}$ wähle $k = 2\lceil b \rceil$ so dass $a_k > b$. Aber $\lim_{n\to\infty} a_n$ ist nicht unendlich, weil $a_{k+1} = 7$.

(ii) Seien $a_n := 2n$ und $b_n = -n$. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ können wir $N = \lceil |b| \rceil$ wählen. Dann gilt $a_n = 2n \geq 2N > b$ für jedes $n \geq N$. Ebenfalls ist $b_n < b$. Deshalb $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

(iii) Seien $a_n := n$ und $b_n := c - n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} n + c - n = \lim_{n\to\infty} c = c.$$

(iv) Seien $a_n := 1/n$ und $b_n := 2/n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mehr Übungen.

20. Unwahre Umkehrungen.

(a) Untersuchen Sie die im Folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(iv) $d_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 2} - 2n$ *(3 Punkte)*

(Ohne Beweis darf verwendet werden: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$.)

(b) Man finde jeweils ein Beispiel für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ggf. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften, und zeige, dass das Beispiel tatsächlich die Eigenschaften besitzt.

(v) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$. *(1 Punkt)*

21. Teilmengen in angeordneten Körpern

Sei $\mathbf{K}$ ein angeordneter Körper.

(a) Zeigen Sie, dass in $\mathbf{K}$ die Identität

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0,1)$$

genau dann gilt, wenn $\mathbf{K}$ archimedisch ist. *(5 Punkte)*

Erinnerung: Die Formulierung "genau dann wenn" bedeutet, dass eine *Äquivalenz* zu zeigen ist, d.h. beide Richtungen " $\Rightarrow$ " und " $\Leftarrow$ ".

(b) Zeigen Sie, dass $\{x \in \mathbf{K} \mid |x^2 - 1| < 3\} = (-2, 2)$ gilt. *(2 Punkte)*

22. Bernoulli Reloaded.

(a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

sofern $x_k \geq 0$ für alle $k \geq 1$ oder falls $-1 \leq x_k < 0$ für alle $k \geq 1$ gilt. *(Bonus: 6 Punkte)*

(b) Belege durch je ein Gegenbeispiel,

(i) dass die Ungleichung nicht für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt, wenn $x_k < -1$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt und *(Bonus: 2 Punkte)*

(ii) dass es nicht genügt, lediglich $x_k \geq -1$ für alle k zu fordern. *(Bonus: 2 Punkte)*

23. Max Power and Supremumman.

Es seien X und Y nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeige:

(a) $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$ *(3 Punkte)*

(b) Ist $\inf X > 0$, so besteht für das Supremum der Menge $Z := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} \in X\}$ der Zusammenhang: $\sup(Z) = (\inf X)^{-1}$. *(4 Punkte)*

Lösung.

(a) Es sei $s_x := \sup(X), s_y := \sup(Y), s_{xy} := \sup(X \cup Y)$. O.E. sei $s_y \geq s_x$. Es sei $\xi \in X \cup Y$ gegeben. Dann gilt $\xi \leq s_y$. Also ist s_y eine obere Schranke von $X \cup Y$ und somit $s_{xy} \leq s_y$. Annahme: $s_{xy} < s_y$. Setze $\epsilon := s_y - s_{xy} > 0$. Nach Definition von s_y existiert ein $y \in Y$ mit

$$s_{xy} = s_y - \epsilon < s_y - \frac{\epsilon}{2} < y \leq s_y,$$

ein Widerspruch zu $y \leq s_{xy}$, da $y \in X \cup Y$. Die Annahme ist daher nicht zu halten und es folgt die Behauptung, nämlich $s_{xy} = s_y$.

(b) $\sup(Z) = (\inf X)^{-1}$.
Es sei $t := \inf X > 0$. Für $z \in Z$ gilt $\frac{1}{z} =: x \in X$ und daher $z = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t}$, da $x \geq t$ für alle $x \in X$. Also ist $\frac{1}{t}$ eine obere Schranke für Z. Folglich $\sup Z \leq \frac{1}{t}$.
Annahme:

$$\sup Z < \frac{1}{t}. \tag{1}$$

Da X beschränkt ist und $t > 0$ ist, existiert ein $M > 0$ mit $0 < x \leq M$ für alle $x \in X$. Daher gilt $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{M}$ für alle $x \in X$. Somit ist $\sup Z > 0$. (1) ist nun äquivalent zu $t < 1/\sup(Z)$. Setze $\epsilon := \frac{1}{\sup(Z)} - t > 0$. Nach Definition des Infimums existiert ein $x' \in X$ mit

$$t \leq x' < t + \frac{\epsilon}{2} < t + \epsilon = \frac{1}{\sup(Z)},$$

folglich $\sup(Z) < \frac{1}{x'}$. Dies ist ein Widerspruch zu $\frac{1}{x'} \in Z$. Die Annahme ist daher nicht zu halten und es folgt die Behauptung.

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 30. Oktober 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.