Martin Schmidt
Ross Ogilvie

14. November 2020

Analysis I
Zwischenklausur

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes.

Bitte bearbeiten Sie die Zwischenklausur unter den gleichen Bedingungen, unter denen die Endklauser stattfinden wird:

- Sie können am **Samstag, den 14. November, 10:00 Uhr** die Klausur auf der Seite https://www.wim.uni-mannheim.de/schmidt/lehre/hws-2020/analysis-i/ herunterladen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben alleine und beenden Sie die Bearbeitung nach 90 Minuten. Das einzige erlaubte Hilfsmittel ist ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt, dass Sie vorher erstellt haben. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (Internet, Skripte, Taschenrechner usw.) sind nicht erlaubt. Schalten Sie bitte Ihr Handy für die Dauer der Klausur aus.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen. Es gibt 6 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.
- Es dürfen ohne Beweis alle im Skript, in den Übungszetteln und in der Großübung bewiesene Aussagen verwendet werden. Aussagen, die von Ihren TutorInnen außerhalb des vom Lehrstuhl bereitgestellten Materials bewiesen wurden, dürfen *nicht* ohne Beweis verwendet werden.

Über Ihre Lösungen:

- Bitte schreiben Sie, *deutlich lesbar* Ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Immatrikulationennummer auf das erste Blatt.
- Starten Sie jede Aufgabe (1,2,3,4,5,6) auf einer neuen Seite.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts Seitenzahlen stehen.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*.
- **Nach Ende der Bearbeitungszeit erstellen Sie eine einzelne PDF Datei mit Ihren Lösungen, deren Dateiname Ihre Immatrikulationsnummer sein muss**, z.B. 1765432.pdf. Sie sollte kleiner als 15 MB sein.
- Sie müssen Ihre Lösungen bis spätestens **Samstag, den 14. November, 11:50 Uhr** in https://www.dropbox.com/request/PGw0vZpelQwWYOCH2lPe hochladen. Dort müssen Sie nur Ihren Namen und Ihre E-Mail Adresse angeben. Danach erhalten Sie eine Bestätigungsemail. Wenn das nicht funktioniert, schicken Sie bitte Ihre Lösungen per Email an Ross Ogilvie `r.ogilvie@math.uni-mannheim.de`.

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \; . \qquad (6\ Punkte)$$

Lösung. Induktionsanfang: $n = 1$: Linke Seite $= \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ und rechte Seite$= \frac{1}{2}$.
Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Für $n+1$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} && = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} && = \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Also folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Aussage für $n+1$. Mit vollständiger Induktion zeigt das die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die 6 Punkte werden folgendermaßen vergeben:
1 Punkt dafür, dass der Fall $n = 1$ überhaupt geprüft wird.
1 Punkt für den Nachweis der Gleichheit im Fall $n = 1$.
1 Punkt wenn die Induktionsvoraussetzung in iergendeiner Form angenommen wird.
1 Punkt für die Zerlegung von $\sum_{k=1}^{n+1} \cdots = \sum_{k=1}^{n} \cdots + \cdots$.
1 Punkt für das Einsetzen der Induktionsvoraussetzung.
1 Punkt für das Umrechnen der Summe in den entsprechenden Ausdruck für $n+1$.

2. **(a)** Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die komplexe Zahl $z := \frac{6+4\imath}{2-3\imath}$ von der Form $z = a + b\imath$ ist und berechnen Sie $|z|$. *(4 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung $|z-1| < |z-1+2\imath|$ erfüllen, und skizziere die Lösungsmenge in der Zahlenebene. Markieren Sie die Randpunkte, die zu der Menge gehören, mit durchgezogenen Linien, und die Randpunkte, die nicht zu der Menge gehören, mit gestrichelten Linien. *(4 Punkte)*
[Tipp. $|z|^2 = x^2 + y^2$ für $z = x + \imath y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.]

Lösung.

(a) Am schnellsten folgt die Lösung aus der Beobachtung $6 + 4\imath = 2\imath(2 - 3\imath)$ so dass $z = 2i$ gilt. In den Übungen haben Sie gelernt, dass die Brüche mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners erweitert werden:

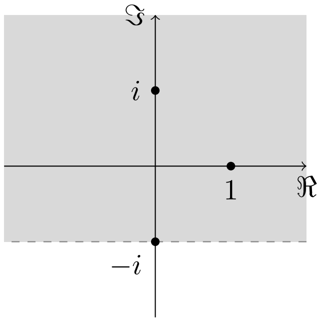
$$\frac{6+4\imath}{2-3\imath} = \frac{6+4\imath}{2-3\imath} \cdot \frac{2+3\imath}{2+3\imath} = \frac{12+8\imath+18\imath-12}{4+9} = \frac{26\imath}{13} = 2\imath.$$

Der Betrag is dann $|2\imath| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$.

Die 4 Punkte werden folgendermaßen vergeben:
1 Punkt für die Multiplikation mit dem komplex Konjugierten des Nenners.
1 Punkt für die Ausmultiplikation der beiden komplexen Zahlen im Zähler.
1 Punkt für das Ergebnis des Real- und Imaginärteils von z.
1 Punkt für das Ergebnis des Betrags $|z|$.

(b)

$$
\begin{aligned}
|z-1| &< |z-1+2\imath| & \Leftrightarrow |z-1|^2 &< |z-1+2\imath|^2 \\
\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 &< (x-1)^2+(y+2)^2 & \Leftrightarrow y^2 &< y^2+4y+4 \\
\Leftrightarrow 0 &< 4y+4 & \Leftrightarrow -1 &< y.
\end{aligned}
$$



Die 4 Punkte werden folgendermaßen vergeben:
1 Punkt für die Quadrierung der Ungleichung.
1 Punkt für die Umrechnung der Ungleichung in eine Ungleichung an Real- und Imaginärteil.
1 Punkt für die Skizzierung der berechneten Ungleichung (auch wenn diese falsch ist).
1 Punkt für die Markierung des Randes durch eine gestrichelet Linie.

3. Wir betrachten die Menge

$$C := \left\{ \frac{1+n}{1+m} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{N} \right\} .$$

(a) Entscheiden Sie, ob C nach oben beschränkt ist. Bestimmen Sie $\sup(C)$ und $\max(C)$, falls sie existieren. *(4 Punkte)*

(b) Entscheiden Sie, ob C nach unten beschränkt ist. Bestimmen Sie $\inf(C)$ und $\min(C)$, falls sie existieren. *(6 Punkte)*

Lösung. Offenbar ist C eine Teilmenge von $\mathbb{Q}\cap(0,\infty)$. Außerdem ist für alle natürlichen Zahlen p und q die rationale Zahl $\frac{p}{q} = \frac{1+(2p-1)}{1+(2q-1)} \in C$. Das zeigt $C = \mathbb{Q}\cap(0,\infty)$.

(a) Wir betrachten die Folge $(k)_{k\in\mathbb{N}}$ in C mit $m=1$ und $n=2k-1$. Diese Folge ist wegen Archimedes Eudoxos nicht beschränkt und erfüllt $\lim_{k\to\infty} k = \infty$. Also ist C nicht nach oben beschränkt und besitzt weder ein Supremum oder Maximum.

Man kann auch die Annahme, dass C nach oben beschränkt ist, durch einen Widerspruch ausschließen, weil es wegen Archimedes Eudoxos für jede reelle obere Schranke eine natürliche Zahl k gibt, die größer ist. Weil jede solche Zahl aber mit $m = 1$ und $n = 2k - 1$ in C liegt, ist das ein Widerspruch.

Die 4 Punkte werden folgendermaßen vergeben:

1 Punkt für die Behauptung, dass C nicht nach oben beschränkt ist.

1 Punkt für den Nachweis, dass C nicht nach oben beschränkt ist.

1 Punkt für die Behauptung, dass das Supremum nicht existiert oder gleich ∞ ist.

1 Punkt für die Behauptung, dass das Maximum nicht existiert.

(b) Alle Element von C sind als Quotienten von positiven Zahlen selber positiv. Also ist 0 eine untere Schranke, und das Infimum $\inf C$ existiert. Um zu zeigen, dass 0 auch das Infimum ist, muss also nur gezeigt werden, dass alle positiven Zahlen keine unteren Schranken von C sind. Wegen Archimedes Eudoxos gibt es für jede positive Zahl eine natürliche Zahl k, so dass $\frac{1}{k}$ kleiner ist als die gegebene positive Zahl. Mit $n = 1$ und $m = 2k - 1$ folgt, dass $\frac{1}{k}$ in C liegt. Das zeigt $\inf C = 0$.
Alternativ betrachten wir mit $n = 1$ die monoton fallende Folge $(\frac{2}{m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ in C. Dann folgt aus dem Monotonieprinzip, dass $\lim_{m\to\infty} \frac{2}{m+1} = 0$ das Infimum von $\{\frac{2}{1+m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ ist. Weil das eine Teilmenge von C ist, ist die untere Schranke $\inf C$ von C auch eine untere Schranke von dieser Teilmenge. Dann folgt $0 \le \inf C \le \inf\{\frac{2}{1+m} \mid m \in \mathbb{N}\} = 0$.

Weil alle Elemente von C positiv sind liegt $\inf C$ nicht in C, und C besitzt kein Minimum. Mann kann auch direkt zeigen, dass C kein Minimum hat. Wenn nämlich C ein Minimum hat, gehört es zu C, und ist von der Form $\frac{1+n}{1+m}$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $\frac{1+n}{1+m+1}$ auch in C und kleiner als $\frac{1+n}{1+m}$, so dass diese Zahl keine untere Schranke und auch kein Minimum sein kann.

Die 6 Punkte werden folgendermaßen vergeben:

1 Punkt für die Angabe jeder richtigen unteren Schranke von C.

1 Punkt für die Behauptung, dass $\inf C = 0$ gilt.

1 Punkt für die Behauptung $\inf C \le 0$, also für die Angabe einer nicht positiven reellen Zahl, die also tatsächlich eine untere Schranke von C, als den Wert von $\inf C$.

1 Punkt für den Nachweis, dass alle positiven Zahlen keine unteren Schranken von C sind.

1 Punkt für die Behauptung, dass C kein Minimum besitzt.

1 Punkt für den Nachweis, dass C kein Minimum besitzt.

4. (a) Sei $a_n := \frac{n^{2020}+n^{1729}+1}{n^{2020}+29n^{17}+1}$. Bestimmen Sie den Grenzwert mit den Rechenregeln. *(3 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie mit Begründung alle Häufungspunkte in $\mathbb{R}$ der Folge

$$b_n := \frac{3n}{3 + n(-1)^n} \; . \qquad (5\ Punkte)$$

Lösung.

(a) Wir teilen Zähler und Nenner durch die der höchste vorkommende Potenz von n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2020}+n^{1729}+1}{n^{2020}+29n^{17}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n^{1729-2020}+n^{-2020}}{1+29n^{17-2020}+n^{-2020}} = \frac{\lim_{n\to\infty}(1+n^{-291}+n^{-2020})}{\lim_{n\to\infty}(1+29n^{-2003}+n^{-2020})}$$
$$= \frac{1+\lim_{n\to\infty} n^{-291}+\lim_{n\to\infty} n^{-2020}}{1+\lim_{n\to\infty} 29n^{-2003}+\lim_{n\to\infty} n^{-2020}} = \frac{1+0+0}{1+0+0} = 1.$$

1 Punkt für das Dividieren von Zähler und Nenner durch n^{2020}.

1 Punkt für das Anwenden der Rechenregeln (dabei müssen die Differenzen der Exponenten 1729-2020 und 17-2020 nicht (richtig) berechnet sein).

1 Punkt für das Ergebnis.

(b) Das Folgenglied b_3 ist nicht definiert. Für die Betrachtung von Grenzwerten spielen aber nur die Folgenglieder mir beliebig großen Indizes eine Rolle, so dass wir $n \geq 4$ setzen können, ohne die Haufungspunkte zu verändern. Wir berechnen die Grenzwerte der beiden Teilfolgen mit geraden und ungeraden Indizes:

$$b_{2k} = \frac{6k}{3+2k} = \frac{6}{\frac{3}{k}+2} \to \frac{6}{2} = 3,$$

und

$$b_{2k-1} = \frac{3(2k-1)}{3-(2k-1)} = \frac{6k-3}{4-2k} = \frac{6-\frac{3}{k}}{\frac{4}{k}-2} \to \frac{6}{-2} = -3,$$

im Grenzwert $k \to \infty$. Wegen einer Übungsaufgabe besteht dann die Menge der Häufungspunkte nur aus diesen beiden Grenzwerte.

Man kann die Aufgabe auch ohne Bezugnahme auf diese Übungsaufgabe lösen. Jede Teilfolge muss entweder unendlich viele Folgenglieder mit geraden Indizes, oder unendlich viele Folgenglieder mit ungeraden Indizes enthalten (oder beides). Es wurde schon gezeigt, dass die beiden entsprechenden Teilfolgen mit den geraden bzw. ungeraden Indizes gegen 3 bzw. -3 konvergieren. Also besitzt jede Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cap[4,\infty)}$ seinerseits eine Teilfolge, die entweder nur Folgenglieder mit geraden Indizes hat, oder nur Folgenglieder mit ungeraden Indizes hat. Jede Teilfolge einer konvergenten Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cap[4,\infty)}$ konvergiert gegen den gleichen Grenzwert wie die ursprüngliche Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cap[4,\infty)}$. Insbeondere konvergiert eine konvergente Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cap[4,\infty)}$ gegen 3, wenn Sie eine Teilfolge mit geraden Indizes besitzt, und gegen -3, wenn sie eine Teilfolge mit ungeraden Indizes besitzt. Das zeigt, dass die Menge der Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cap[4,\infty)}$ nur aus diesen beiden Grenzwerten besteht. Es zeigt auch, dass eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}\cap[4,\infty)}$ genau dann konvergiert, wenn sie entweder höchstens endlich viele Folgenglieder mit geraden Indizes oder höchstens endlich viele Folgenglieder mit ungeraden Indizies hat, aber natürlich nicht beides. Das musste aber nicht gezeigt werden.

Die 5 Punkte werden folgendermaßen vergeben:

1 Punkt für die Aufteilung in gerade und ungerade Indizies.

1 Punkt für die Berechnung des Grenzwertes der Teilfolge mit den geraden Indizies.

1 Punkt für die Berechnung des Grenzwertes der Teilfolge mit den ungeraden Indizies.

1 Punkt für die Behauptung, dass die Häufungspunkte aus diesen beiden Grenzwerten bestehen.

1 Punkt für die Begründung warum die Häufungspunkte aus diesen beiden Grenzwerten

bestehen.

Die beiden Punkte für die Berechnung der Grenzwerte der beiden Teilfolgen werden vergeben, wann immer Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen richtig berechnet werden.

5. Wir wissen, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{mit Konvergenzradius } R = 1.$$

(a) Zeigen Sie

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n \qquad \text{für } |x| < 1. \qquad \textit{(2 Punkte)}$$

(b) Entscheiden Sie und begründen Sie, ob der Konvergenzradius der Reihe aus (a) auch 1 ist. *(3 Punkte)*

(c) Berechnen Sie den Grenzwert von der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}. \qquad \textit{(4 Punkte)}$$

Hinweis. Sie können die Teilaufgaben unabhängig voreinander lösen, wenn Sie in den Teilaufgaben (b) und (c) die Teile (a) bzw. (a) und (b) benutzen.

Lösung.

(a) Das folgt aus Cauchys Produkt für Reihen: $(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$ for $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Die Anwendung dieser Formel ergibt:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x^n = (n+1)x^n.$$

Außerdem zeigt Cauchys Produkt für Reihen auch, dass im Konvergenzbereich beide Reihen absolut konvergieren, und dann auch das Produkt absolut konvergiert.

Alternativ kann man diesen Teil auch durch folgende Beobachtung für $|x| < 1$ lösen:

$$x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Wenn wir den ersten Summanden auf der rechten Seite subtrahieren erhalten wir

$$(x-1)\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{-1}{1-x} \quad \text{oder auch} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Dabei muss allerdings gezeigt werden, dass der Konvergenzradius dieser Reihe nicht kleiner als 1 ist, d.h. es darf in (b) nicht die Konvergenz für $|x| < 1$ vorausgesetzt werden. Die Punkte dafür werden aber in (b) für den Konvregnbezradius vergeben.

Die beiden Punkte werden folgendermaßen vergeben:

1 Punkt für die Berechnung der Koeffizienten vom Cauchyprodukt.

1 Punkt für einen Hinweis, der darauf schließen läßt, dass das Cauchyprodukt für $|x| < 1$ konvergiert. Ein Hinweis auf das Cauchyprodukt reicht z.B. aus.

(b) Wegen Teil (a) wissen wir, dass der Konvergenzradius mindestens 1 ist. Also genügt es zu zeigen, dass der Konvergenzradius nicht größer als 1 ist. Dafür git es mindestens drei Möglichkeiten:

1. Für $|x| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, weil $((n+1)x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge ist, und wegen dem Cachykrterium für Reihen die Potenzeriehe dann nicht konvergiert. Also ist $1 = |x|$ nicht kleiner als der Konvergenzradius, d.h. $R \leq 1$.

2. Quotientenkriterium: Für $|x| > 1$ gilt

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = \frac{n+2}{n+1}|x| \to |x| > 1$$

im Grenzwert $n \to \infty$. Also konvergiert die Reihe dann nicht. Dann gilt also nicht $|x| < R$ für alle $|x| > 1$, d.h. wieder $R \leq 1$.

3. Aus der Ungleichung $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1}$ folgt auch $\limsup \sqrt[n]{n+1} \geq \limsup \sqrt[n]{n} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$. Das zeigt $R = (\limsup \sqrt[n]{n+1})^{-1} \leq 1$. Wenn allerdings nicht auf (a) verwiesen, oder in (a) nicht das Cauchyprodukt benutzt wird, dann muss auch $R \leq 1$ gezeigt werden. Das folgt mit $\sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n}$ aus $\limsup \sqrt[n]{n+1} \leq \limsup \sqrt[n]{2n} = \lim \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1$. Wegen der Formel für den Konvergenzradius ist der Konvergenzradius 1.

Die 3 Punkte werden folgendermaßen vergeben:
1 Punkt für die Behauptung $R \geq 1$ (ohne Begründung, weil das direkt aus (a) folgt).
1 Punkt für die Erwähnung iergdeiner Methode, mit der $R \leq 1$ gezeigt werden kann.
1 Punkt für den Nachweis von $R \leq 1$.
Wenn die Formel für den Konvergenzradius benutzt wird, dann wird allein für die Formel 1 Punkt vergeben. Die anderen beiden Punkte werden für die vollständige Begründung aller Schritte bei der Anwendung dieser Formel vergeben. Wir rechnen mit unvollständigen Begündungen für den Grenzwert $\sqrt[n]{n+1} \to 1$ im Grenzwert $n \to \infty$. Das wurde bisher nicht gezeigt. In diesem Fall gibt es insgesamt von den drei Punkten nur 2 Punkte.

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Weil $\frac{1}{3} < 1$ konvergieren alle vorkommenden Grenzwerte in dieser Rechnung.
Die 4 Punkte werden folgendermaßen vergeben:
1 Punkt für die Gleichung $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{3}{2}$.
1 Punkt für die Gleichung $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{-n} = (\frac{3}{2})^2$.
1 Punkt für die Zerlegung $\sum_{n=0}^{\infty} n3^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$.
1 Punkt für das Ergebnis.

6. Sei $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ mit $b_0 = \sqrt{2}$.

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $1 < b_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton ist. *(3 Punkte)*

(c) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} b_n$ und begünden Sie Ihre Rechnung. *(3 Punkte)*

[Tipp. $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.]
Hinweis. Sie können die Teilaufgaben unabhängig voreinander lösen, wenn Sie in den Teilaufgaben (b) und (c) die Teile (a) bzw. (a) und (b) benutzen.

Lösung.

(a) Aus $1 < 2 < 4$ folgt $1 < \sqrt{2} = b_0 < 2$. Wenn $1 < b_n < 2$ gilt, dann folgt

$$3 < 2 + b_n < 4 \quad \Rightarrow \quad 1 < 2 + b_n < 4 \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{2+b_n} = b_{n+1} < 2.$$

Die 3 Punkte werden folgendermaßen vergeben:
1 Punkt für den Fall $n = 0$.
1 Punkt für die Induktionsvoraussetzung.
1 Punkt für die Folgerung der Ungleichungen für $n+1$ aus der Induktionsvoraussetzung.

(b) Wir zeigen, dass die Folge (streng) monoton wachsend ist

$$b_{n+1} = \sqrt{2+b_n} > b_n \quad \Leftrightarrow \quad 2 + b_n > b_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > b_n^2 - b_n - 2 = (b_n - 2)(b_n + 1).$$

Weil in (a) $1 < b_n < 2$ gezeigt wurde, gilt $b_n - 2 < 0$ und $b_n + 1 > 2 > 0$. Also ist $(b_n - 2)(b_n + 1)$ kleiner als Null und die Folge ist tatsächlich (streng) monoton wachsend.
Alternativ kann die Monotonie auch mit vollständiger Induktion gezeigt werden. Für den Induktionsanfang folgt $b_1 = \sqrt{2+b_0} > \sqrt{2}$ aus $2 + \sqrt{2} = 2 + b_0 > 2$. Aus der Induktionsvoraussetzung $b_n \geq b_{n-1}$ folgt dann $2 + b_n \geq 2 + b_{n-1}$ und $b_{n+1} = \sqrt{2+b_n} \geq \sqrt{2+b_{n-1}} = b_n$
Die 3 Punkte werden folgendermaßen vergeben:
1 Punkt für die Behauptung, dass die Folge monoton wachsend ist.
1 Punkt für die Beseitigung der Wurzel durch Quadrieren bzw. Induktionsanfang.
1 Punkt für ein vollständiges Argument für die Ungleichung $b_{n+1} \geq b_n$ für $b_n \in (1, 2)$

(c) Weil die Folge monoton ist und beschränkt ist, konvergiert sie. Also können wir in der Rekursionsgleichung auf beiden Seiten den Grenzwert bilden:

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2 + b_n \quad \Rightarrow \quad \left(\lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right)^2 = 2 + b \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2 + b.$$

Also löst der Grenzwert die quadratische Gleichung, und muss also (siehe Hinweis) entweder -1 oder 2 sein. Weil der Grenzwert wegen (a) nicht kleiner als 1 sein kann, muss er 2 sein.
Alternativ kann man auch die Abschätzung im Teil (a) verschärfen. Aus der Ungleichung $0.5^{n+2} < 1$ folgt

$$\begin{aligned} &4 \cdot 0.5 - 0.5^{n+2} > 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot (0.5)^{n+1} - 0.5^{2n+2} > 0.5^n \\ &\quad \Rightarrow \quad 4 - 4 \cdot (0.5)^{n+1} + 0.5^{2n+2} < 4 - 0.5^n \quad \Rightarrow \quad 2 - (0.5)^{n+1} < \sqrt{4 - 0.5^n}. \end{aligned}$$

Mit $2 - 0.5^0 = 1 < b_0 < 2$ können wir induktiv auch $2 - 0.5^n < b_n < 2$ zeigen. Gilt nämlich für ein n, so folgt

$$4 - 0.5^n < 2 + b_n < 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4 - 0.5^n} < \sqrt{2+b_n} = b_{n+1} < 2. \quad \Rightarrow \quad 2 - (0.5)^{n+1} < b_{n+1} < 2.$$

Also gilt diese verschärfte Ungleichung tatsächlich für alle n. Dann folgt der Genzwert aus dem Sandwichkriterium.

Die 3 Punkte werden folgendermaßen vergeben:

1 Punkt für die Folgerung der Konvergenz aus (a) und (b).

1 Punkt für den richtigen Grenzwert (ohne Begründung).

1 Punkt für die vollständige Berechnung des Grenzwertes.