Martin Schmidt
Volker Eing

Lösungen zur Klausur

1. **(a)** Diese Aufgabe kann man sowohl mit dem Wurzelkriterium als auch mit dem Quotientenkriterum lösen

Variante 1 (Wurzelkriterium): Es gibt zunächst **(1P)** für die richtige Anwendung des Wurzelkriteriums. Diesen Punkt gibt es entweder für das Wort Wurzelkrietrium oder den folgenden Ausdruck oder eine Umformung von ihm:

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^a}}$$

Der Grenzwert dieses Ausdrucks kann direkt berechnet werden:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(\sqrt[n]{n})^a} \underbrace{=}_{\textbf{(2P)}} a.$$

Also konvergiert die Reihe für **(1P)** $a > 1$ nicht **(1P)**. Bei falscher Berechnung des Grenzwertes, gibt es diese Punkte nur, für die entsprechenden Aussagen Für den Fall $a = 1$ ist es ein Beispiel der alternierenden Reihe von Leibniz **(1P)** und konvergiert **(1P)**.

Variante 2 (Quotientenkriterium): Es gibt wieder **(1P)** entweder für das Wort Quotientenkriterium oder den folgenden Ausdruck oder eine Umformungen von ihm:

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)^a}\frac{n^a}{a^n}.$$

Danach gibt es jeweils **(1P)** für die Vereinfachung und Berechnung des Grenzwertes, und **(1P)** für den richtigen Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a\left(\frac{n}{n+1}\right)^a = a.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für **(1P)** $a > 1$ nicht **(1P)**. Bei falscher Berechnung des Grenzwertes gibt es diese Punkte wieder nur für die entsprechenden Aussagen. Für den Fall $a = 1$ ist es ein Beidpiel der alternierenden Reihe von Leibniz **(1P)** und konvergiert **(1P)**.

(b) Für $a > 1$ konvergiert sie nicht absolut, weil sie nicht konvergiert **(1P)**. Für $a = 1$ konvergiert die Reihe der Absolutbeträge als harmonische Reihe nicht **(1P)**. Diese beiden Punkte gibt es allein für die richtigen Aussagen.

2. **(a)** In diesem Teil wird der Nenner nach unten abgeschätzt.

Variante 1:

- **(1P)** für die Berechnung der Ableitung $g'(x) = e^x - 1$ des Nenners $g(x) = e^x - x$.
- **(1P)** für die Bestimmung des einzigen kritischen Punktes bei $x = 0$ von g.
- **(1P)** dafür dass g auf $(-\infty, 0)$ monoton fallend und auf $(0, \infty)$ monoton wachsend ist.
- **(1P)** dafür, dass $g(x) \geq g(0) = 1$ gilt. Den Punkt gibt es für jede positivbe richtige untere Schranke von g.

Variante 2:

- **(4P)** benutzen der Ungleichung $e^x \geq x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (mit Verweis auf Skript oder Übung)

Variante 3:

- **(2P)** Punkte für die Reihenentwicklung von e^x und die Folgerung, dass $e^x \geq x + 1$ für $x \geq 0$.
- **(2P)** Punkte für $e^x - x > 0$ für alle $x < 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) In diesem Teil wird das Monotonieverhalten untersucht.

- **(1P)** für die Bestimmung der Ableitung $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.
- **(1P)** die Bestimmung des einzigen kritischen Punktes bei $x = 1$
- **(1P)** monoton steigend für $x < 1$ und monoton fallend für $x > 1$.

(c) **(2P)** für das Verhalten gegen $-\infty$:
Variante 1: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ mit Hopital:

- **(1P)** Ableiten
- **(1P)** Grenzwert -1 angeben.

Variante 2: Benutzen, dass e^x schneller steigt als jede Potenz von x:

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x-x} \underbrace{=}_{\textbf{(1P)}} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x} \underbrace{=}_{\textbf{(1P)}} -1$

Daneben noch folgende Punkte:
(1P) für $f(x) > 0$ für $x > 1$, alternativ Hopital für den Grenzwert $x \to \infty$.
(1P) für $f(1) = \frac{1}{e-1}$.
(1P) für das Bild $(-1, \frac{1}{e-1}]$.

3. Dieses bestimmte Integral löst man am besten mit Substitution und anschießender partieller Integration bzw. Anwedung einer Fomel aus dem Skript:
Für **(1P)** $t = \sqrt[3]{x}$ mit **(1P)** $dt = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$.

$$\int_0^{\pi^3} \cos(\sqrt[3]{x})dx \underbrace{=}_{\textbf{(1P)}} \int_0^{\pi} 3\cos(t)t^2 dt = \underbrace{3\Big(\Big[\sin(t)t^2\Big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin(t)t dt\Big)}_{\textbf{(2P)}}$$

$$= \underbrace{0}_{\textbf{(1P)}} - \underbrace{6\Big(\Big[-\cos(t)t\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos(t))dt\Big)}_{\textbf{(2P)}}$$

$$\underbrace{=}_{\textbf{(1P)}} -6\pi - 6[\sin(t)]_0^{\pi} \underbrace{=}_{\textbf{(1P)}} -6\pi$$

Für die erste Substitution gibt es also **(3P)**, dann für die erste partielle Integration **(2P)**, für die letzte partielle Integration **(1P)** und für das Einsezten der Grenzen **(1P)**. Wenn zuerst ein falsche Substitution berechnet wurde, dann kann für anschießende partielle Integrationen maximal **(3P)** vergeben werden, und wenn zuerst eine falsche partielle Integration gemacht wurde, dann kann für anchleißende Substitutionen maximal **(3P)** vergeben werden.

4. **(a)** Anwendung der erste Regel von L'Hopital.

$$x|_{x=0} \underbrace{= 0 =}_{\textbf{(1P)}} (e^x - e^{-x})|_{x=0}, \qquad \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{1}}_{\textbf{(1P)}} = \underbrace{2}_{\textbf{(1P)}} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$$

Den letzten Punkt gibt es für das richtige Ergebnis. Bei falscher Berechnung der Ableitungen bei der Regel von L'Hopitel, gibt es den Punkt nur, wenn hier der Grenzwert der Quoteinten der berechneten Ableitungen steht.

(b) Es gilt $|\cos(x_n)| \leq 1$: **(2P)** (oder für jede andere richtige obere Schanke). Da nun die Folge $\cos(x_n)$ beschränkt ist, besitzt sie nach dem Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge **(1P)**.

(c) **(1P)** dafür, dass die Aussage als falsch erkannt wurde. **(1P)** Angabe eines richtigen Gegenbeispiels, z.B. $x_n = n\pi$. **(1P)** für die Begründung, warum die Folge $\cos(x_n)$ dann nicht konvergent ist. Hier: $\cos(x_n)$ hat die zwei Häufungspunkte $-1, 1$.

5. Zu zeigen sind beide Richtungen.

(a) Zuerst die Richtung "$T_{3,x_0}(f)(x) = f(x) \Rightarrow f^{(4)} = 0$ und $f \in C^4(\mathbb{R})$":

- **(1P)** dafür, dass erkannt wurde, dass dann f ein Polynom 3-ten Grades ist.
- **(2P)** dafür, dass erkannt wurde, dass jedes Polynom 3-ten Grades $f^{(4)} = 0$ erfüllt.
- **(2P)** dafür, dass erkannt wurde, dass jedes Polynom 4 mal bzw. undendlich mal differenzierbar ist

Alternativ, wenn das nicht gesehen wird: Taylorpolynom aufstellen und die vierte Ableitung ausrechnen.

(b) Nun die umgekehrte Richtung:
(4P) Satz von Taylor: Es existiert $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = T_{3,x_0}(f)(x) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^4 \underbrace{=}_{\textbf{(1P)}} T_{3,x_0}(f)(x).$$

Alternativ:

(i) **(1P)**: $f^{(4)} = 0 \Rightarrow f^{(3)}$ ist konstant.

(ii) **(1P)**: $\Rightarrow f^{(2)}$ ist Polynom 1. Grades

(iii) **(1P)**: $\Rightarrow f^{(1)}$ ist Polynom 2. Grades

(iv) **(1P)**: $\Rightarrow f$ ist Polynom 3. Grades

(1P): Erkennbarer Bezug auf eine der folgenden Aussagen: "Jede konvergente Potenzreihenfunktion stimmt auf dem Konvergenzberich mit ihrer Taylorreihe überein"bzw. seines Korollares: "Jede Polynomfunktion stimmt mit ihrer Taylorreihe überein".