Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I
Klausur Lösung

22. Januar 2021

1. Zum Aufwärmen.

(a) Wir lösen nach z auf und erweitern mit dem komplex Konjugierten den Nenners:

$$z = \frac{10}{3+i} = \frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{10(3-i)}{9+1} = 3 - i.$$

(1P) für das Auflösen nach z.
(1P) für die Erweiterung mit dem komplex Konjugierten des Nenners.
(1P) für das Ausrechnen von Realteil und Imaginärteil.

(b) Zunächst formen wir die Ungleichung um zu $x^2 - x = x(x-1) < 0$. Ein Produkt ist genau dann negativ, wenn ein Faktor negativ ist und der andere positiv. Weil aber $x-1$ kleiner ist als x, kann dann nur $x-1$ negativ sein und x positiv. Also ist die Menge gleich $(0,1)$. Also ist das Infimum 0, das Supremum 1 und Minimum und Maximum existieren nicht.
(1P) für $(-\infty, 0] \cap A = \emptyset$, also 0 is untere Schranke und $\inf A \geq 0$.
(1P) für $[1, \infty) \cap A = \emptyset$, also 1 ist obere Schranke und $\sup A \leq 1$.
(1P) für $\inf A \leq 0$, weil alle $x \in (0,1)$ die Ungleichung erfüllen.
(1P) für $\sup A \geq 1$, weil alle $x \in (0,1)$ die Ungleichung erfüllen.
(1P) dafür dass Maximum und Minimum nicht existieren.

2. Achtung die Kurve! Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}.$$

(a) Wir berechnen die Ableitung und das Monotonieverhalten:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = x\frac{2-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2}.$$

Die kritischen Punkte sind die Nullstellen von f', also $x = 0$ und die Lösungen von $\sqrt{1+x^2} = 2 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$. Dann ist f' auf $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ positiv, auf $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ negativ. Damit sind $x \pm \sqrt{3}$ lokale Maxima und $x = 0$ ein lokales Minimum.
(2P) für die Berechnung von f'.
(1P) für die Nullstelle von f' bei $x = 0$.
(2P) für Umformen und Berechnen der Nullstellen $x \pm \sqrt{3}$ von f'.
(1P) für lokales Minimum bei $x = 0$
(1P) für lokales Maximum bei $x = \pm\sqrt{3}$. Diese letzten beiden Punkte gibt es nur, wenn entweder das Vorzeichen von $f'(x)$ links und recht vom kritischen Punkt bestimmt wurde, oder das Vorzeichen der zweiten Ableitung am kritischen Punkt.

(b) Für $x \to \pm\infty$ gehen sowohl $1 + x^2 \to \infty$ als auch $\sqrt{1 + x^2} \to \infty$. Deshalb konvergiert in beiden Fällen $f(x) \to 0$.
(1P) für $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
(1P) für $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

(c) Aus dem Monotonieverhalten in (a) und $f(0) = 0$ und den Grenzwerten (b) folgt, dass f bei $x = 0$ ein globales Minimum mit Wert $f(0) = 0$ annimt und bei $f(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ globale Maxima annimt. Also ist das Bild $f[\mathbb{R}] = [0, \frac{1}{4}]$
(2P) für das Monotonieverhalten auf $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$ und $(\sqrt{3}, \infty)$ (eventuell steht das bei (a)). Um diese Monotonieverhalten zu begründen kann auch (a) mit der zweiten Ableitung benutzt werden, wenn aus den Notizen hervorgeht, dass f' stetig ist, und deshalb das Monotonieverhalten sich nur an den kritischen Punkten ändern kann.
(1P) für $f(0) = 0 = \min f[\mathbb{R}]$
(1P) für $f[\pm\sqrt{3}] = \frac{1}{4} = \max f[\mathbb{R}]$.
<u>Variante 2:</u> Aus $\sqrt{1 + x^2} \geq 1$ folgt $\dfrac{1}{1 + x^2} = \dfrac{1}{(\sqrt{1 + x^2})^2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, also $f(x) \geq 0$. Mit $f(0) = 0$ folgt $\min f[\mathbb{R}] = 0$.
Mit $y = \sqrt{1 + x^2}$ folgt $0 \leq (y-2)^2 = y^2-4y-4 = 1+x^2-4\sqrt{1 + x^2}+4$ und $4(\sqrt{1 + x^2} - 1) \leq 1 + x^2$, also $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{4}$ mit $f(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{4}$.
Mit dem Zwischenwertsatz folgt $f[\mathbb{R}] = [0, \frac{1}{4}]$.
(1P) für die Abschätzung $f(x) \geq 0$.
(1P) für die Abschätzung $f(x) \leq \frac{1}{4}$.
(1P) für $f(0) = 0 = \min f[\mathbb{R}]$
(1P) für $f[\pm\sqrt{3}] = \frac{1}{4} = \max f[\mathbb{R}]$.

3. (a) Dieses bestimmte Integral wird durch die Substitution $t = x^2 + 9$ mit $dt = 2xdx, t(0) = 9, t(4) = 25$ gelöst:

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2 + 5}\, dx = \int_9^2 5\sqrt{t}\, \frac{dt}{2} = \tfrac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_9^{25} = \tfrac{1}{3}(5^3 - 3^3) = \tfrac{98}{3}$$

(1P) für iregendeine Substitution einschließlich der Substituion von dx.
(1P) für das Berechnen einer Stammfunktion nach der Substitution.
(1P) für die Resubstituion oder die Substitution der Grenzen.
(1P) für Einsetzen der Grenzen. Dabei müssen die 3-er Potenzen nicht brechnet sein.

(b) Eine zweimalige partielle Integration löst das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos(x)\, dx &= e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\, dx \\
&= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx \\
&= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx \\
2\int e^x \cos(x)\, dx &= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \\
\int e^x \cos(x)\, dx &= \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x)
\end{aligned}$$

(1P)+**(1P)** für beide partielle Integrationen.
(1P) dafür das letzte Integral auf die rechte Seite zu bringen.
(1P) für die Stammfunktion.

(c) Diese Integral wird durch Partialbruchzerlegung gelöst:

$$\frac{x}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} \quad \Longleftrightarrow \quad x = A(x+1) + B(x+2)$$

Einsetzten von den Nullstellen $x = -2$ ergibt $A = 2$ und $x = -1$ ergibt $B = -1$. Dann folgt

$$\int \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\, dx = 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C.$$

(1P) für den Ansatz $f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$.
(1P) für die Gleichung an A und B.
(1P) für das Berechnen von A und B.
(1P) für das Berechnen des Integrals.

4. Die Funktion $\ln|x|$ besitzt auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Ableitung $\frac{1}{x}$. Also ist die Ableitung von $x^2 \ln|x|$ gleich $2x\ln|x| + \frac{x^2}{x} = 2x\ln|x| + x$. Der zweite Summand ist bei $x = 0$ natürlich stetig. Wir schreiben $2x\ln|x| = \dfrac{2\ln|x|}{x^{-1}}$ und wenden die zweite Regel von L'Hopital an und erhalten $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{2\ln|x|}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\frac{2}{x}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0\pm} -2x = 0$. Also existieren die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0\pm} f'(x)$ und sind beide Null. Dann folgt aus dem Mittelwertsatz, dass die Funktion bei $x = 0$ differenzierbar ist.
(1P) für die Ableitung bei $x \neq 0$
(1P)+**(1P)** für die Berechnung beider Grenzwerte $\lim_{x\to 0\pm} f'(x)$
(1P) für $\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$
(1P) für f ist bei $x = 0$ differenzierbar.

<u>Variante 2</u> Wir untersuchen direkt den Differenzenquotienten bei $x = 0$:

$$g(x) := \frac{x^2\ln|x| - 0}{x - 0} = x\ln|x| = \frac{\ln|x|}{x^{-1}}.$$

Wir wenden wieder die zweite Regel von L'Hopital an und erhalten $\lim_{x\to 0\pm} \frac{\ln|x|}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0\pm} -x = 0$. Also existieren die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to 0\pm} g(x)$ des Differenzenquotienten und sind beide Null. Dann ist g bei $x = 0$ stetig und f bei $x = 0$ differenzierbar.

(1P) für den Differenzenquotient bei $x = 0$

(1P)+**(1P)** für die Berechnung beider Grenzwerte $\lim_{x\to 0\pm} g(x)$

(1P) für $\lim_{x\to 0-} g(x) = \lim_{x\to 0+} g(x)$

(1P) für f ist bei $x = 0$ differenzierbar.

5. **(a)** Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in (0, 1]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Weil $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, und damit auch eine Cauchyfolge, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \delta$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Dann folgt mit der ersten Ungleichung auch $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{m})| < \epsilon$. Also ist $(f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

(1P) für die Wahl eines $\delta > 0$ bei gegebenem $\epsilon > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für $|x - y| < \delta$.

(1P) für die Wahl eines $N \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| < \delta$ für $n, m \geq N$.

(1P) für die Abschätzung $|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{m})| < \epsilon$ für $n, m \geq N$.

(b) Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für alle $x, y \in (0, 1]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Die Differenz $(x_n - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ zweier Nullfolgen auch eine Nullfolge ist Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - \frac{1}{n}| < \delta$ für alle $n \geq N$ gibt. Dann folgt $|f(x_n) - f(\frac{1}{n})| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Also ist $(f(x_n) - f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Nullfolge.

(1P) für die Wahl eines $\delta > 0$ bei gegebenem $\epsilon > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ für $|x - y| < \delta$.

(1P) für die Wahl eines $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \frac{1}{n}| < \delta$ für $n \geq N$.

(1P) für die Abschätzung $|f(x_n) - f(\frac{1}{n})| < \epsilon$ für $n \geq N$.

(c) Bei allen Punkten $x \in (0, 1]$ ist g stetig, weil f stetig ist. Für die Stetigkeit bei $x = 0$ benutzen wir das Folgenkriterium. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge in $(0, 1]$. Wegen (b) konvergiert auch $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $L = g(0)$. Daraus folgt die Stetigkeit von g bei $x = 0$.

(1P) dafür dass in iergendeiner Form auf die Stetigkeit von f bei $x \in (0, 1]$ verwiesen wird.

(1P) für $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = L = g(0)$ für alle Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0, 1]$.

(d) Die Menge $[0, 1]$ ist kompakt und wegen (b) ist das Bild $g[[0, 1]]$ dann auch kompakt, und damit beschränkt. Als Teilmenge $f[(0, 1]] = g[(0, 1]]$ ist dann auch beschränkt.

(1P) dafür dass in iergeneiner Form $g[[0, 1]]$ als kompakt erkannt wird.

(1P) dafür dass in iergendeiner Form $f[(0, 1] \subset g[[0, 1]]$ erkannt wird.

(e) Das gilt nicht **(1P)**.

Ein Gegenbeispiel **(1P)** ist $(0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$.