Martin Schmidt
Ross Ogilvie

14. November 2020

Analysis I
Zwischenklausur

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes.

Bitte bearbeiten Sie die Zwischenklausur unter den gleichen Bedingungen, unter denen die Endklauser stattfinden wird:

- Sie können am **Samstag, den 14. November, 10:00 Uhr** die Klausur auf der Seite https://www.wim.uni-mannheim.de/schmidt/lehre/hws-2020/analysis-i/ herunterladen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben alleine und beenden Sie die Bearbeitung nach 90 Minuten. Das einzige erlaubte Hilfsmittel ist ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt, dass Sie vorher erstellt haben. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (Internet, Skripte, Taschenrechner usw.) sind nicht erlaubt. Schalten Sie bitte Ihr Handy für die Dauer der Klausur aus.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen. Es gibt 6 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.
- Es dürfen ohne Beweis alle im Skript, in den Übungszetteln und in der Großübung bewiesene Aussagen verwendet werden. Aussagen, die von Ihren TutorInnen außerhalb des vom Lehrstuhl bereitgestellten Materials bewiesen wurden, dürfen *nicht* ohne Beweis verwendet werden.

Über Ihre Lösungen:

- Bitte schreiben Sie, *deutlich lesbar* Ihren Vor- und Nachnamen und Ihre Immatrikulationennummer auf das erste Blatt.
- Starten Sie jede Aufgabe (1,2,3,4,5,6) auf einer neuen Seite.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts Seitenzahlen stehen.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*.
- **Nach Ende der Bearbeitungszeit erstellen Sie eine einzelne PDF Datei mit Ihren Lösungen, deren Dateiname Ihre Immatrikulationsnummer sein muss**, z.B. 1765432.pdf. Sie sollte kleiner als 15 MB sein.
- Sie müssen Ihre Lösungen bis spätestens **Samstag, den 14. November, 11:50 Uhr** in https://www.dropbox.com/request/PGw0vZpelQwWYOCH2lPe hochladen. Dort müssen Sie nur Ihren Namen und Ihre E-Mail Adresse angeben. Danach erhalten Sie eine Bestätigungsemail. Wenn das nicht funktioniert, schicken Sie bitte Ihre Lösungen per Email an Ross Ogilvie `r.ogilvie@math.uni-mannheim.de`.

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \,. \qquad (6\ Punkte)$$

2. **(a)** Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die komplexe Zahl $z := \frac{6+4\imath}{2-3\imath}$ von der Form $z = a + b\imath$ ist und berechnen Sie $|z|$. *(4 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, die die Ungleichung $|z-1| < |z-1+2\imath|$ erfüllen, und skizziere die Lösungsmenge in der Zahlenebene. Markieren Sie die Randpunkte, die zu der Menge gehören, mit durchgezogenen Linien, und die Randpunkte, die nicht zu der Menge gehören, mit gestrichelten Linien. *(4 Punkte)*

[Tipp. $|z|^2 = x^2 + y^2$ für $z = x + \imath y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.]

3. Wir betrachten die Menge

$$C := \left\{ \frac{1+n}{1+m} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\} .$$

(a) Entscheiden Sie, ob C nach oben beschränkt ist. Bestimmen Sie $\sup(C)$ und $\max(C)$, falls sie existieren. *(4 Punkte)*

(b) Entscheiden Sie, ob C nach unten beschränkt ist. Bestimmen Sie $\inf(C)$ und $\min(C)$, falls sie existieren. *(6 Punkte)*

4. **(a)** Sei $a_n := \frac{n^{2020}+n^{1729}+1}{n^{2020}+29n^{17}+1}$. Bestimmen Sie den Grenzwert mit den Rechenregeln. *(3 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie mit Begründung alle Häufungspunkte in $\mathbb{R}$ der Folge

$$b_n := \frac{3n}{3+n(-1)^n} \,. \qquad (5\ Punkte)$$

5. Wir wissen, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{mit Konvergenzradius } R = 1.$$

(a) Zeigen Sie

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n \qquad \text{für } |x| < 1. \qquad (2\ Punkte)$$

(b) Entscheiden Sie und begründen Sie, ob der Konvergenzradius der Reihe aus (a) auch 1 ist. *(3 Punkte)*

(c) Berechnen Sie den Grenzwert von der folgenden Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}. \qquad (4\ Punkte)$$

Hinweis. Sie können die Teilaufgaben unabhängig voreinander lösen, wenn Sie in den Teilaufgaben (b) und (c) die Teile (a) bzw. (a) und (b) benutzen.

6. Sei $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ mit $b_0 = \sqrt{2}$.

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $1 < b_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton ist. *(3 Punkte)*

(c) Berechnen Sie $\lim_{n \to \infty} b_n$ und begünden Sie Ihre Rechnung. *(3 Punkte)*

[Tipp. $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$.]
Hinweis. Sie können die Teilaufgaben unabhängig voreinander lösen, wenn Sie in den Teilaufgaben (b) und (c) die Teile (a) bzw. (a) und (b) benutzen.