Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I
Klausur

22. Januar 2021

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Bitte unterschreiben Sie die Klausur auf dem Deckblatt und versehen jedes zusätzliche Blatt, das nicht angeheftet ist, mit Ihrem Namen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *ausschließlich* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.
- Es dürfen nur alle im Skript (auch mit * gekennzeichnete), in den Übungszetteln und in der Großübung bewiesene Aussagen verwendet werden. Aussagen, die von Ihren TutorInnen außerhalb des vom Lehrstuhl bereitgestellten Materials bewiesen wurden dürfen **nicht** verwendet werden.

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe	mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1 (a)	3		4	5		
(b)	5		5 (a)	3		
2 (a)	7		(b)	3		**Note:**
(b)	2		(c)	2		
(c)	4		(d)	2		
3 (a)	4		(e)	2		
(b)	4					
(c)	4					

1. Zum Aufwärmen.

(a) Berechnen Sie eine Lösung der folgenden Gleichung in der Form $z = a + ib$: *(3 Punkte)*

$$(3 + i)z - 10 = 0.$$

(b) Untersuchen Sie, ob die folgende Menge A ein Infimum, Supremum, Minimum und Maximum hat, bestimmen Sie es gegebenenfalls und begründen Sie Ihr Ergebnis:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < x\}$$ *(5 Punkte)*

2. Achtung die Kurve!

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und untersuchen Sie, ob sie lokale Minima oder lokale Maxima sind. *(7 Punkte)*

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x)$. *(2 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie den Bildbereich $f[\mathbb{R}]$ und begründen Sie ihr Ergebnis. *(4 Punkte)*

3. Integrative Arbeit.

Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx.$ *(4 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int e^x \cos(x)\,dx.$ *(4 Punkte)*

(c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+1)}.$ *(4 Punkte)*

4. Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 \ln|x| & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$

Im Skript wird gezeigt, dass diese Funktion bei $x = 0$ stetig ist. Untersuchen Sie, ob f bei $x = 0$ auch differenzierbar ist (Hinweis: benutzen Sie eine Regel von L'Hopital). *(5 Punkte)*

5. Beschränktes Bild. Sei $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ eine *gleichmäßig stetige* Funktion. Die folgenden Teilaufgaben können Sie unabhängig voneinander bearbeiten, wobei Sie jeweils die genannten Aufgabenteile benutzen dürfen, auch wenn Sie diese (noch) nicht gezeigt haben:

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist (Hinweis: als Nullfolge ist $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge). *(3 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,1]$ die Folge $(f(x_n) - f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Nullfolge ist. (Hinweis: Die Differenz $(x_n - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ zweier Nullfolgen ist auch eine Nullfolge). *(3 Punkte)*

(c) Weil in $\mathbb{R}$ jede Cauchyfolge konvergiert, existiert wegen (a) der Grenzwert $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$. Wir definieren $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{wenn } x \in (0,1] \\ L & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit (b), dass g stetig ist. *(2 Punkte)*

(d) Benutzen Sie (c) um zu zeigen, dass das Bild $f[(0,1]]$ beschränkt ist. *(2 Punkte)*

(e) Ist für jede stetige Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ das Bild $f[(0,1]]$ beschränkt? Beweisen Sie dies oder geben Sie ein Gegenbeispiel. *(2 Punkte)*