

13. Übung

54. Partialbruchzerlegung I.

Wir berechnen $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$. Bemerke, dass $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ faktorisiert wird.

(a) Wir sollten $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$ schreiben. Was müssen A und B sein?
(1 Bonuspunkt)

(b) Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} dx$.
(2 Bonuspunkte)

Nun berechnen wir $\int \frac{2x - 7}{x^2 - 5x + 6} dx$.

(c) Nochmal schreiben wir $\frac{2x - 7}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$. Was müssen A und B sein?
(2 Bonuspunkte)

(d) Berechnen Sie nun $\int \frac{2x - 7}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} dx$.
(1 Bonuspunkt)

Hier ist ein Beispiel, wo der Grad des Zählers größer als der Grad des Nenners ist:

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

(e) In diesem Fall ist $\frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = p(x) + \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$ für ein Polynom $p(x)$. Was ist der Grad von $p(x)$? Was müssen $p(x)$, A und B sein?
(3 Bonuspunkte)

(f) Berechnen Sie die Integral.
(1 Bonuspunkt)

Lösung.

(a)

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} = \frac{A(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} + \frac{B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{(A + B)x + (-3A - 2B)}{x^2 - 5x + 6}.$$

Das heißt, $A + B = 0$ und $-3A - 2B = 1$. Die Lösung ist $B = 1, A = -1$.

Eine andere Methode: setze $x = 3$ oder $x = 2$ in der Gleichung $1 = A(x - 3) + B(x - 2)$.

Das zeigt, dass $1 = 0 + B(1)$ und $1 = A(-1) + 0$.

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{-1}{x - 2} + \frac{1}{x - 3} \\ &= -\ln|x - 2| + \ln|x - 3| + C. \end{aligned}$$

(c) In diesem Fall,

$$\frac{2x-7}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{x^2-5x+6},$$

und daher muss $A+B=2$ und $3A+2B=7$. Die Lösung ist $A=3, B=-1$.

(d)

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-7}{x^2-5x+6} dx &= \int \frac{3}{x-2} + \frac{-1}{x-3} dx \\ &= 3 \ln|x-2| - \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2-5x+6} &= p(x) + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \\ &= \frac{p(x)(x^2-5x+6) + (A+B)x + (-3A-2B)}{x^2-5x+6}. \end{aligned}$$

$p(x)$ muss Grad 1 sein, denn der Zähler ist gesamt Grad 3. Sei $p(x) = Cx + D$. Es folgt

$$\begin{aligned} x^3 &= (Cx + D)(x^2 - 5x + 6) + (A + B)x + (-3A - 2B) \\ &= Cx^3 + (D - 5C)x^2 + (A + B + 6C - 5D)x + (-3A - 2B + 6D). \end{aligned}$$

Es sieht schwer aus, aber es ist nicht so. Sofort ist $C=1$, dann $D=5C=5$. Daher wir haben $A+B-19=0$ und $-3A-2B+30=0$. Die Lösung ist $A=-8, B=27$.

(f)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x^2-5x+6} dx &= \int x + 5 + \frac{-8}{x-2} + \frac{27}{x-3} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 5x - 8 \ln|x-2| + 27 \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

55. Partialbruchzerlegung II.

Berechnen Sie $\int \frac{x^7-1}{x^4-3x^3+x^2+4} dx$.

(6 Bonuspunkte)

Lösung. Wir schreiben

$$\frac{x^7-1}{x^4-3x^3+x^2+4} = p(x) + \frac{r(x)}{x^4-3x^3+x^2+4}$$

für Polynomen p mit Grad 3 und r mit Grad kleiner als 4. Sei $Q(x) := x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$. Mit

Polynomdivision

$$\begin{aligned}
 x^7 - 1 &= x^3(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 + (3x^3 - x^2 - 4)) - 1 \\
 &= x^3(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4) + x^3(3x^3 - x^2 - 4) - 1 \\
 &= x^3Q(x) + 3x^6 - x^5 - 4x^3 - 1 \\
 &= x^3Q(x) + 3x^2(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 + (3x^3 - x^2 - 4)) - x^5 - 4x^3 - 1 \\
 &= x^3Q(x) + 3x^2Q(x) + 8x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 1 \\
 &= x^3Q(x) + 3x^2Q(x) + 8xQ(x) + 8x(3x^3 - x^2 - 4) - 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 1 \\
 &= x^3Q(x) + 3x^2Q(x) + 8xQ(x) + 21x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 32x - 1 \\
 &= x^3Q(x) + 3x^2Q(x) + 8xQ(x) + 21Q(x) + 51x^3 - 33x^2 - 32x - 85 \\
 &= (x^3 + 3x^2 + 8x + 21)Q(x) + 51x^3 - 33x^2 - 32x - 85.
 \end{aligned}$$

Deshalb

$$\begin{aligned}
 \frac{x^7 - 1}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} &= \frac{(x^3 + 3x^2 + 8x + 21)Q(x) + 51x^3 - 33x^2 - 32x - 85}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} \\
 &= x^3 + 3x^2 + 8x + 21 + \frac{51x^3 - 33x^2 - 32x - 85}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}
 \end{aligned}$$

Nun müssen wir den Nenner faktorisiert. Alle ganzzahligen Nullstellen teilen den konstanten Koeffizienten. Wir probiert $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ und finden $2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 = 0$. Deshalb $x - 2$ ist ein Faktor vom Nenner.

$$\begin{aligned}
 x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 &= x^3(x - 2 + 2) - 3x^3 + x^2 + 4 \\
 &= x^3(x - 2) + 2x^3 - 3x^3 + x^2 + 4 \\
 &= x^3(x - 2) - x^3 + x^2 + 4 \\
 &= x^3(x - 2) - x^2(x - 2 + 2) + x^2 + 4 \\
 &= x^3(x - 2) - x^2(x - 2) - x^2 + 4 \\
 &= x^3(x - 2) - x^2(x - 2) - x(x - 2 + 2) + 4 \\
 &= x^3(x - 2) - x^2(x - 2) - x(x - 2) - 2x + 4 \\
 &= x^3(x - 2) - x^2(x - 2) - x(x - 2) - 2(x - 2 + 2) + 4 \\
 &= x^3(x - 2) - x^2(x - 2) - x(x - 2) - 2(x - 2) \\
 &= (x^3 - x^2 - x - 2)(x - 2).
 \end{aligned}$$

Jetzt probiert wir die Faktoren von 2 für $x^3 - x^2 - x - 2$. 2 ist eine Nullstelle.

$$\begin{aligned}
 x^3 - x^2 - x - 2 &= x^2(x - 2) + x^2 - x - 2 \\
 &= x^2(x - 2) + x(x - 2) + x - 2 \\
 &= (x^2 + x + 1)(x - 2).
 \end{aligned}$$

$x^2 + x + 1$ hat keine reelle Nullstellen, weil $b^2 - 4ac = -3 < 0$.

Die Form sollten sein:

$$\begin{aligned} \frac{51x^3 - 33x^2 - 32x - 85}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (B-4C+D-A)x^2 + (B+4C-4D-A)x + (B+4D-2A)}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Dieser Kurs heißt Analysis. Frage den Lehrer von Linear Algebra, wie die Lösung gefunden werden kann. Aber die Lösung ist $A = \frac{2501}{49}$, $B = \frac{127}{7}$, $C = -\frac{2}{49}$, $D = -\frac{13}{49}$. Wir berechnen die Integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7 - 1}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} &= \int x^3 + 3x^2 + 8x + 21 + \frac{\frac{2501}{49}}{x-2} + \frac{\frac{127}{7}}{(x-2)^2} - \frac{\frac{2}{49}x + \frac{13}{49}}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 + x^3 + 4x^2 + 21x + C + \frac{2501}{49} \ln|x-2| - \frac{127}{7} \frac{1}{x-2} \\ &\quad - \frac{1}{49} \ln(x^2+x+1) - \left(\frac{13}{49} - \frac{1}{49}\right) \int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{4}x^4 + x^3 + 4x^2 + 21x + C + \frac{2501}{49} \ln|x-2| - \frac{127}{7} \frac{1}{x-2} \\ &\quad - \frac{1}{49} \ln(x^2+x+1) - \frac{12}{49} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

56. Ein Integral aus der Fourier-Analysis

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \pi & \text{für } m = n \end{cases}.$$

[Tipp: Für $m \neq n$ wende man zweimal partielle Integration an, um zu zeigen, dass ein gewisses Vielfaches des gesuchten Integrals verschwindet. Für $m = n$ wende man einmal partielle Integration und anschließend die Gleichung $\sin^2 = 1 - \cos^2$ an.]

(4 Bonuspunkte)

Lösung. Zunächst gilt in jedem Falle gemäß partieller Integration:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(mx)}_{=f(x)} \underbrace{\cos(nx)}_{=g'(x)} dx \\ &= \cos(2\pi m) \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sin(2\pi n)}_{=0} - \cos(0) \underbrace{\frac{1}{n} \sin(0)}_{=0} - \int_0^{2\pi} m \cdot (-\sin(mx)) \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) dx \\ &= \frac{m}{n} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx. \end{aligned} \quad (*)$$

Im Falle $m \neq n$ wenden wir noch ein weiteres Mal partielle Integration an:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx \\
 \stackrel{(*)}{=} & \frac{m}{n} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(mx)}_{=f(x)} \underbrace{\sin(nx)}_{=g'(x)} \, dx \\
 = & \frac{m}{n} \cdot \left(\underbrace{\sin(2\pi m)}_{=0} \left(-\frac{1}{n}\right) \cos(2\pi n) - \underbrace{\sin(0)}_{=0} \left(-\frac{1}{n}\right) \cos(0) - \int_0^{2\pi} m \cos(mx) \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \cos(nx) \, dx \right) \\
 = & \frac{m^2}{n^2} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx
 \end{aligned}$$

und erhalten somit

$$\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \cdot \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = 0,$$

also wegen $1 - \frac{m^2}{n^2} \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) \, dx = 0.$$

Im Falle $m = n$ erhalten wir aus $(*)$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(mx) \, dx \stackrel{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \sin^2(mx) \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2(mx)) \, dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} \cos^2(mx) \, dx.$$

Hieraus folgt

$$2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(mx) \, dx = 2\pi \quad \text{und somit} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2(mx) \, dx = \pi.$$

57. Die Flächeninhalt eines Dreiecks

In dieser Aufgabe berechnen wir $\int_0^1 x \, dx$ nach Abschnitt 8.3 (Riemannintegral). Seien $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ und p_n die Partition

$$[0, 1] = [0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \cup \dots \cup [\frac{n-1}{n}, 1].$$

- (a) Was ist der größte und kleinste Wert von f auf $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$? (2 Bonuspunkte)
- (b) Zeige, dass die Obersummen und Untersummen von p_n

$$S(p_n, f) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \quad s(p_n, f) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k$$

sind. (2 Bonuspunkte)

- (c) Kann man Satz 8.20 benutzen, zu zeigen, dass f riemannintegabel ist? (2 Bonuspunkte)

- (d) Erinnere sich an die gaußsche Summenformel: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Bestimme die Summen $S(p_n, f)$ und $s(p_n, f)$. (1 Bonuspunkte)

- (e) Wir wissen

$$s(p_n, f) \leq \int_{\underline{a}}^{\overline{a}} f \leq \overline{\int} f \leq S(p_n, f).$$

Berechne das Limes von $S(p_n, f)$ und $s(p_n, f)$ für $n \rightarrow \infty$. Was ist denn $\int_0^1 x \, dx$?

(2 Bonuspunkte)

- (f) Zeige, dass die Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit Basis 1 und Höhe 1 ist $\frac{1}{2}$. (1 Bonuspunkte)

- (g) Können Sie die Flächeninhalt unter der Parabel $f(x) = x^2$ so berechnen? (8 Bonuspunkte)

Lösung.

- (a) f ist monoton, also der kleinste Wert ist $f(\frac{k}{n}) = \frac{k}{n}$ und der größte Wert ist $f(\frac{k+1}{n}) = \frac{k+1}{n}$.

- (b) Sei $I_k := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$. Nach Definition 8.17 ist die Obersumm:

$$\begin{aligned} S(p_n, f) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in I_k} f(x) \chi_{I_k} \, dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \chi_{I_k} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \int_0^1 \chi_{I_k} \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} 1 \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1). \end{aligned}$$

Die Untersumm ist

$$\begin{aligned}
 s(p_n, f) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x \in I_k} f(x) \chi_{I_k} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_0^1 \chi_{I_k} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k.
 \end{aligned}$$

(c) Ja. Satz 8.20 heißt “das Kriterium von Darboux” und sagt, dass f riemannintegabel ist, genau so wenn $\forall \epsilon > 0$ es eine Partition p mit $S(p, f) - s(p, f) < \epsilon$ gibt.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Bemerke, dass

$$S(p_n, f) - s(p_n, f) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1-k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{1}{n^2} n = \frac{1}{n}.$$

Wähle n groß, so dass $\frac{1}{n} < \epsilon$ (Archimedes). So gilt das Kriterium.

(d)

$$\begin{aligned}
 s(p_n, f) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} (n-1)(n-1+1) = \frac{n-1}{2n}, \\
 S(p_n, f) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n l = \frac{n+1}{2n}
 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} s(p_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} S(p_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Definition 8.15 definiert die Ober- und Unterintegrale von f . Die Oberintegral ist das Infimum von der Treppenfunktionen g mit $g \geq f$. Die Funktion $\sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in I_k} f(x) \chi_{I_k}$ ist eine Treppenfunktion und größer als f . Daher ist die Oberintegral kleiner als $S(p_n, f)$ für alle n . Nach Satz 3.5(vi) mit der konstanten Folge $x_n := \bar{\int} f$ folgt es, dass $\bar{\int} f \leq \lim S(p_n, f) = \frac{1}{2}$. Ähnlich ist $\frac{1}{2} = \lim s(p_n, f) \leq \underline{\int} f$. Zusammen zeigt dies, dass

$$\frac{1}{2} = \lim s(p_n, f) \leq \underline{\int} f \leq \bar{\int} f \leq \lim S(p_n, f) = \frac{1}{2}$$

sind alle gleich. Deshalb $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

(f) Dieser Dreieck ist genau die Flächeninhalt unter $y = x$ und zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

(g) Sei $I_k := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$.

$$\begin{aligned}
 s(p_n, f) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x \in I_k} f(x) \chi_{I_k} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\
 &\rightarrow \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(p_n, f) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{x \in I_k} f(x) \chi_{I_k} dx \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{l=1}^n l^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\
 &\rightarrow \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Also ist $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

58. Die letzte Aufgabe.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, im Inneren (a, b) stetig differenzierbar, sodass sich f' sogar stetig auf $[a, b]$ fortsetzen lässt. Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$F(c) := \int_a^b f(x) \sin(cx) dx.$$

Zeige, dass gilt $\lim_{|c| \rightarrow \infty} F(c) = 0$.

(4 Bonuspunkte)

Lösung. Mit partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}
 F(c) &= \left[-f(x) \frac{1}{c} \cos(cx) \right]_a^b + \frac{1}{c} \int_a^b f'(x) \cos(cx) dx \\
 &= \frac{1}{c} \left[-f(b) \cos(cb) + f(a) \cos(ca) + \int_a^b f'(x) \cos(cx) dx \right].
 \end{aligned}$$

Da f und f' stetig sind, $\exists M > 0$ mit $|f(x)| \leq M$ und $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} |F(c)| &= \frac{1}{|c|} \left| -f(b) \cos(cb) + f(a) \cos(ca) + \int_a^b f'(x) \cos(cx) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|c|} \left[|-f(b) \cos(cb)| + |f(a) \cos(ca)| + \left| \int_a^b f'(x) \cos(cx) dx \right| \right] \\ &\leq \frac{1}{|c|} \left[|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x) \cos(cx)| dx \right] \\ &\leq \frac{1}{|c|} \left[2M + \int_a^b M dx \right] \\ &= \frac{M}{|c|} [2 + b - a] \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $|c| \rightarrow \infty$.