Martin Schmidt
Ross Ogilvie

18. Dezember 2020

Analysis I

13. Übung

54. Partialbruchzerlegung I.

Wir berechnen $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$. Bemerke, dass $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ faktorisiert wird.

(a) Wir sollten $\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$ schreiben. Was müssen A und B sein?

(1 Bonuspunkt)

(b) Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx=\int \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\,dx$. *(2 Bonuspunkte)*

Nun berechnen wir $\int \frac{2x-7}{x^2-5x+6}\,dx$.

(c) Nochmal schreiben wir $\frac{2x-7}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$. Was müssen A und B sein?

(2 Bonuspunkte)

(d) Berechnen Sie nun $\int \frac{2x-7}{x^2-5x+6}\,dx=\int \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\,dx$. *(1 Bonuspunkt)*

Hier ist ein Beispiel, wo der Grad des Zählers großer als der Grad des Nenners ist:

$$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx.$$

(e) In diesem Fall ist $\frac{x^3}{x^2-5x+6}=p(x)+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$ für ein Polynom $p(x)$. Was ist der Grad von $p(x)$? Was müssen $p(x)$, A und B sein? *(3 Bonuspunkte)*

(f) Berechnen Sie die Integral. *(1 Bonuspunkt)*

55. Partialbruchzerlegung II.

Berechnen Sie $\int \frac{x^7-1}{x^4-3x^3+x^2+4}\,dx$. *(6 Bonuspunkte)*

56. Ein Integral aus der Fourier-Analysis

Es seien $m,n\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\int_0^{2\pi}\cos(mx)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{für } m\neq n\\ \pi & \text{für } m=n\end{cases}.$$

[Tipp: Für $m\neq n$ wende man zweimal partielle Integration an, um zu zeigen, dass ein gewisses Vielfaches des gesuchten Integrals verschwindet. Für $m=n$ wende man einmal partielle Integration und anschließend die Gleichung $\sin^2=1-\cos^2$ an.]

(4 Bonuspunkte)

57. Die Flächeninhalt eines Dreiecks

In dieser Aufgabe berechnen wir $\int_0^1 x\,dx$ nach Abschnitt 8.3 (Riemannintegral). Seien $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ und p_n die Partition

$$[0,1] = [0, \tfrac{1}{n}] \cup [\tfrac{1}{n}, \tfrac{2}{n}] \cup \cdots \cup [\tfrac{n-1}{n}, 1].$$

(a) Was ist der größte und kleinste Wert von f auf $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$? *(2 Bonuspunkte)*

(b) Zeige, dass die Obersummen und Untersummen von p_n

$$S(p_n, f) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1) \qquad s(p_n, f) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k$$

sind. *(2 Bonuspunkte)*

(c) Kann man Satz 8.20 benutzen, zu zeigen, dass f riemannintegrabel ist? *(2 Bonuspunkte)*

(d) Erinnere sich an die gaußsche Summenformel: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Bestimme die Summen $S(p_n, f)$ und $s(p_n, f)$. *(1 Bonuspunkte)*

(e) Wir wissen

$$s(p_n, f) \leq \underline{\int} f \leq \overline{\int} f \leq S(p_n, f).$$

Berechne das Limes von $S(p_n, f)$ und $s(p_n, f)$ für $n \to \infty$. Was ist denn $\int_0^1 x\,dx$? *(2 Bonuspunkte)*

(f) Zeige, dass die Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit Basis 1 und Höhe 1 ist $\frac{1}{2}$. *(1 Bonuspunkte)*

(g) Können Sie die Flächeninhalt unter der Parabel $f(x) = x^2$ so berechnen? *(8 Bonuspunkte)*

58. Die letzte Aufgabe.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, im Inneren (a,b) stetig differenzierbar, sodass sich f' sogar stetig auf $[a,b]$ fortsetzen lässt. Für $c \in \mathbb{R}$ sei

$$F(c) := \int_a^b f(x)\sin(cx)\,\mathrm{d}x.$$

Zeige, dass gilt $\lim_{|c|\to\infty} F(c) = 0$. *(4 Bonuspunkte)*