Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

11. Dezember 2020

12. Übung

47. Achtung Die Kurve! III

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass -1 und 1 die kritischen Punkte von f sind. *(2 Punkte)*

(b) Entscheiden Sie für die kritischen Punkte von f jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beidem handelt. (Benutzen Sie Korollar 7.16) *(2 Punkte)*

(c) Untersuchen Sie, ob f auf den Intervallen $(-\infty, -1], [-1, 1]$ und $[1, \infty)$ jeweils monoton wachsend, monoton fallend oder keines von beidem ist. *(1 Punkte)*

(d) Untersuchen Sie, ob f auf den Intervallen $(-\infty, -\sqrt{3}], [-\sqrt{3}, 0], [0, \sqrt{3}]$ und $[\sqrt{3}, \infty)$ jeweils konvex oder konkav ist. *(2 Punkte)*

(e) Skizzieren Sie den Graphen von f. *(1 Punkte)*

Lösung.

(a) Die Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Sie ist Null, genau so wenn $1 - x^2 = 0$ ist, und das gilt nur in $x = \pm 1$.

(b) Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} = \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3}.$$

Also ist $f''(1) = -4/8 < 0$ und $x = 1$ ist ein lokales Maximum. Und $f''(-1) = 4/8 > 0$ zeigt, dass $x = -1$ ein lokales Minimum ist.

(c)

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 > x^2 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 1.$$

Daher ist f auf $[-1, 1]$ monoton wachsend. Und auf $(-\infty, -1]$ und $[1, \infty)$ ist f monoton fallend.

(d) $f''(x) > 0$ genau so wenn $0 < x(x^2 - 3) = (x + \sqrt{3})x(x - \sqrt{3})$. Deshalb ist f'' negativ auf $(-\infty, -\sqrt{3})$ und $(0, \sqrt{3})$. Da ist f konkav. Auf $(-\sqrt{3}, 0)$ und $(\sqrt{3}, \infty)$ ist f'' positiv, also ist f konvex.

(e) https://www.desmos.com/calculator/ozuety6asb

48. Taylorreihen

Die durch $f(x) := \frac{4+x-2x^2}{3+x-6x^2-2x^3}$ definierte Funktion f sei auf einer geeigneten Umgebung X von $x_0 := 0$ definiert.

(a) Man bestimme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x) = \frac{\alpha + \beta x}{1 - 2x^2} + \frac{\gamma}{3 + x} \, .$$

[Tipp: Man bringe den Ausdruck „auf einen Nenner“ und mache dann im Zähler einen Koeffizientenvergleich bezüglich x (Stichwort "Partialbruchzerlegung").] *(3 Punkte)*

(b) Mit Hilfe der Darstellung von f aus (a) und der geometrischen Reihe bestimme man die Taylorreihe von f an der Stelle $x_0 = 0$. *(2 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe aus (b). *(2 Punkte)*

Lösung.

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{\alpha + \beta x}{1 - 2x^2} + \frac{\gamma}{3 + x} &= \frac{(\alpha + \beta x)(3 + x)}{(1 - 2x^2)(3 + x)} + \frac{\gamma(1 - 2x^2)}{(3 + x)(1 - 2x^2)} \\
&= \frac{3\alpha + 3\beta x + \alpha x + \beta x^2 + \gamma - 2\gamma x^2}{3 + x - 6x^2 - 2x^3} \\
&= \frac{(3\alpha + \gamma) + (3\beta + \alpha)x + (\beta - 2\gamma)x^2}{3 + x - 6x^2 - 2x^3} \\
\Leftrightarrow \qquad 4 + x - 2x^2 &= (3\alpha + \gamma) + (3\beta + \alpha)x + (\beta - 2\gamma)x^2
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $3\alpha + \gamma = 4$, $3\beta + \alpha = 1$ und $\beta - 2\gamma = -2$ gelten muss. Die Lösungen ist $\gamma = 1$, $\alpha = 1$ und $\beta = 0$. Deshalb ist

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x^2} + \frac{1}{3 + x}$$

(b) Die geometrische Reihe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

Also

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1 - 2x^2} + \frac{1}{3 + x} \\
&= \frac{1}{1 - (2x^2)} + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - (-\frac{1}{3}x)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (2x^2)^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{3}x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^k.
\end{aligned}$$

Die erste Reihe hat nur geraden Grad von x. Wir benutzen einen Trick: $\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$ ist 1 wenn n gerade ist, und ist Null wenn n ungerade ist. Dann

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}[1+(-1)^n]\, 2^{n/2} x^n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left([1+(-1)^n]\, 2^{n/2-1} x^n + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left([1+(-1)^n]\, 2^{n/2-1} + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right) x^n.
\end{aligned}$$

Oder man kann einfach setzen:

$$a_n := \begin{cases} 2^{n/2} + \frac{1}{3^{n+1}} & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ -\frac{1}{3^{n+1}} & \text{wenn } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

und $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ schreiben.

(c) Wir wissen schon den Konvergenzradius der geometrischen Reihen:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (2x^2)^k$ konvergiert genau so wenn $|2x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{3}x)^k$ konvergiert genau so wenn $|-\frac{1}{3}x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3$.
Der Konvergenzradius von f ist denn die kleinere Zahl, nämlich $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
ODER man kann mit Satz 4.25 berechnen. Sei $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.

$$|a_n| := \begin{cases} 2^{n/2} + 3^{-(n+1)} & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ 3^{-(n+1)} & \text{wenn } n \text{ ungerade ist,} \end{cases}$$

Weil $0 < 3^{-(n+1)} < 1$ und $2^{n/2} \geq 2$ (für $n \geq 2$), folgt es, dass $|a_{2k}| > |a_{2k-1}| \Rightarrow \sqrt[n]{|a_{2k}|} > \sqrt[2]{|a_{2k-1}|}$ und deshalb $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[2k]{|a_{2k}|}$. Es gilt

$$\begin{gathered}
2^k + 0 < 2^k + 3^{-(2k+1)} < 2^k + 1 \\
\sqrt[2k]{2^k} < \sqrt[2k]{|a_{2k}|} < \sqrt[2k]{2^k + 1}.
\end{gathered}$$

Die linke Seite ist relativ einfach: $\sqrt[2k]{2^k} = 2^{\frac{k}{2k}} = 2^{0.5}$. Die rechte Seite ist ein bisschen schwerer:

$$\begin{aligned}
\sqrt[2k]{2^k + 1} &= \sqrt[2k]{\frac{2^k+1}{2^k} 2^k} \\
&= \sqrt[2k]{1 + 2^{-k}}\ \sqrt[2k]{2^k} \\
&< \sqrt[2k]{1+1}\ \sqrt[2k]{2^k} \\
&= \sqrt[k]{2^{0.5}}\, \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Nach dem Sandwich Satz konvergiert $\sqrt[2k]{|a_{2k}|}$ gegen $\sqrt{2}$. Der Konvergenzradius ist denn $R = \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

49. Integration und Differentiation

Berechnen Sie die folgenden (auf geeigneten Definitionsbereichen definierten) Stammfunktionen und machen Sie bei (a) bis (c) jeweils die Probe durch Differentiation.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *(3 Punkte)*

(c) $\displaystyle\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(e) $\displaystyle\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$ *(3 Punkte)*

(f) $\displaystyle\int x\arccos(x)\,\mathrm{d}x$ *(3 Punkte)*

Lösung.

(a) Sei $u = 2x-5$. Es folgt, dass $dx = \frac{1}{2}du$ und

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx = \int \frac{1}{u}\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\ln|u| + \text{const.} = \frac{1}{2}\ln|2x-5| + \text{const.}$$

Probe: $\left(\frac{1}{2}\ln|2x-5|\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-5} = \frac{1}{2x-5}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -\frac{1}{2}\int f(\Phi(t))\cdot\Phi'(t)dt \qquad \text{mit } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \Phi(t) = 1-t^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int f(x)dx\right)\circ\Phi + const. \text{ nach Substitutionsregel} \\
&= -\left(\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right)\circ\Phi + const. \\
&= -\sqrt{\Phi(x)} + const = -\sqrt{1-x^2} + const.
\end{aligned}$$

Probe: $\frac{d}{dx}(-\sqrt{1-x^2}) = \frac{-(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(c) Mit partieller Integration:

$$\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\, dx = x^2 e^x - \int 2x \cdot e^x\, dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{g'(x)}\, dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx \right)$$

$$= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - e^x + \text{const.} \right)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + \text{const.}$$

Probe:

$$\frac{d}{dx}(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x) = (2x e^x + x^2 e^x) - (2e^x + 2x e^x) + 2e^x = x^2 e^x.$$

(d) Sei $u = \sin x$, also $\frac{du}{dx} = \cos x$.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| = \ln|\sin x| + \text{const.}$$

Dies ist Beispiel 8.6(viii).

(e)

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)\, dx = \int \cos x - \int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx = \sin x - \int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx$$

Nochmal setze $u = \sin x$. Dann gilt

$$\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \int \sin^2 x \cdot \cos x\, dx = \sin x - \int u^2\, du = \sin x - \frac{1}{3} u^3 = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + \text{const.}$$

(f) Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int \underbrace{x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\arccos(x)}_{f(x)}\, dx = \arccos(x) \cdot (\frac{1}{2} x^2) - \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \arccos(x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Sei $h(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{g'}\, dx \\
&\overset{(b)}{=} -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\, dx \\
&= -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) - h(x) \\
2h(x) &= -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \\
h(x) &= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x).
\end{aligned}$$

Deshalb

$$\int x\arccos(x)\, dx = \frac{1}{2}x^2\arccos(x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)\right) + \text{const.}$$

50. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Substitutionsmethode:

(a) $\displaystyle\int_{1/\pi}^{1} \frac{\sin(1/x)}{x^2}\, \mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+2x^3}\, \mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

Lösung.

(a) Wir substituieren $u = \frac{1}{x}$ und damit $x = \frac{1}{u}$. Es ist $\frac{dx}{du} = -\frac{1}{u^2} = -x^2$. Aus $x = 1$ ergibt sich $u = 1$ und aus $x = 1/\pi$ ergibt sich $u = \pi$. Damit erhalten wir:

$$\int_{1/\pi}^{1} \frac{\sin(1/x)}{x^2}\, dx = \int_{\pi}^{1} \frac{\sin(u)}{(1/u)^2} \cdot \left(-\tfrac{1}{u^2}\right)\, du = \int_{\pi}^{1} -\sin(u)\, du = \cos(1) - \cos(\pi) = \cos(1) + 1.$$

(b) Wir substituieren $u = 1 + 2x^3$ und damit $1 = 6x^2\frac{dx}{du}$ nach der Kettenregel. Aus $x = 0$ ergibt sich $u = 1$ und aus $x = 1$ ergibt sich $u = 3$. Damit erhalten wir:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+2x^3}\, dx = \int_1^3 x^2\sqrt{u} \cdot \frac{1}{6x^2}\, du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^{1/2}\, du = \frac{1}{6}\,\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^3 = \frac{1}{9}(3^{3/2} - 1).$$

51. Die Kettenregel für Integrale

Bestimme $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{-x}^{x^2} t^2 + t\,\mathrm{d}t\right)$ *(2 Punkte)*

Lösung. Mann berechnet:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\int_{-x}^{x^2} t^2 + t\,\mathrm{d}t\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\Bigg|_{-x}^{x^2}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C\right) \\
&= 2x^5 + 2x^3 + x^2 - x.
\end{aligned}$$

Aber es gibt eine bessere Methode. Der Hauptsatz (Satz 8.3 oder 8.27) sagt, dass $\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$ für eine Funktion $F(t)$ mit $F'(t) = f(t)$. Sei F mit $F'(t) = f(t) = t^2 + t$. Dann $\int_{-x}^{x^2} t^2 + t\ dt = F(x^2) - F(-x)$. Es folgt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\int_{-x}^{x^2} t^2 + t\,dt\right) &= \frac{d}{dx}\Big(F(x^2) - F(-x)\Big) \\
&= 2x\,F'(x^2) - (-1)\,F'(-x) \\
&= 2xf(x^2) + f(-x) \\
&= 2x(x^4 + x^2) + (x^2 - x) \\
&= 2x^5 + 2x^3 + x^2 - x.
\end{aligned}$$

Diese Idee kann benutzt werden, wenn man die Integral nicht weiß. Zum Beispiel: $\frac{d}{dx}\int_0^{2x-4} \exp(-t^2)\ dt$. Sei $F(t) = \int \exp(-t^2)\ dt$. Denn

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^{2x-4} \exp(-t^2)\ dt &= \frac{d}{dx}\Big(F(2x-4) - F(0)\Big) \\
&= 2\,F'(2x-4) - 0 \\
&= 2\exp(-(2x-4)^2).
\end{aligned}$$

52. Rekursive Integration

Es sei $f_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ nicht negativ, stetig und monoton steigend. Definiere rekursiv $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

für $n \geq 0$. Zeige, dass

$$f_{n+1}(x) \leq \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

für alle $n \geq 0$ und $x \geq 0$ gilt. [Tipp: Partielle Integration] *(4 Bonuspunkte)*

Lösung. Für $n = 0$ und $x > 0$ beliebig $f_0(t) \leq f_0(x)$ für alle $t \in [0, x]$, weil f_0 monoton steigend ist. Denn

$$\begin{aligned} f_1(x) = \int_0^x f_0(t)\ dt &\leq \int_0^x f_0(x)\ dt \\ &= f_0(x) \int_0^x 1\ dt \\ &= x\, f_0(x). \end{aligned}$$

Sei die Behauptung wahr für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Bemerke, dass f_{n+1} eine Stammfunktion von f_n ist.

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= \int_0^x f_{n+1}(t)\ dt \\ &\leq \int_0^x \frac{t}{n+1} f_n(t)\ dt \qquad (*) \\ &= \left[\frac{t}{n+1} f_{n+1}(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{n+1} f_{n+1}(t)\ dt \\ &= \frac{x}{n+1} f_{n+1}(x) - \frac{1}{n+1} \int_0^x f_{n+1}(t)\ dt \\ &= \frac{x}{n+1} f_{n+1}(x) - \frac{1}{n+1} f_{n+2}(x) \\ f_{n+2}(x) + \frac{1}{n+1} f_{n+2}(x) &\leq \frac{x}{n+1} f_{n+1}(x) \\ \frac{n+2}{n+1} f_{n+2}(x) &\leq \frac{x}{n+1} f_{n+1}(x) \\ f_{n+2}(x) &\leq \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{n+1} f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+2} f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

(*) $=$ die Monotonie des Integrals (Satz 8.26(iii))

Diese Aufgabe zeigt, zum Beispiel, Ungleichungen von exp. Wir wissen $f_0(t) := \exp t$ ist nicht negativ und monoton steigend. Denn

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \Big[\exp t\Big]_0^x = \exp x - 1 \\ f_2(x) &= \Big[\exp t - t\Big]_0^x = \exp x - x - 1 \end{aligned}$$

Die Aufgabe sagt,

$$\begin{aligned} f_2(x) &\leq \frac{x}{2} f_1(x) \\ e^x - x - 1 &\leq \frac{x}{2}(e^x - 1) \\ e^x - \frac{x}{2} e^x &\leq \frac{1}{2}x + 1 \\ e^x(1 - \frac{1}{2}x) &\leq 1 + \frac{1}{2}x \\ e^x &\leq \frac{2+x}{2-x} \text{ für } x < 2. \end{aligned}$$

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 18. Dezember 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.