Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

11. Dezember 2020

12. Übung

47. Achtung Die Kurve! III

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}.$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass -1 und 1 die kritischen Punkte von f sind. *(2 Punkte)*

(b) Entscheiden Sie für die kritischen Punkte von f jeweils, ob es sich um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder keines von beidem handelt. (Benutzen Sie Korollar 7.16) *(2 Punkte)*

(c) Untersuchen Sie, ob f auf den Intervallen $(-\infty, -1], [-1, 1]$ und $[1, \infty)$ jeweils monoton wachsend, monoton fallend oder keines von beidem ist. *(1 Punkte)*

(d) Untersuchen Sie, ob f auf den Intervallen $(-\infty, -\sqrt{3}], [\sqrt{3}, 0], [0, \sqrt{3}]$ und $[\sqrt{3}, \infty)$ jeweils konvex oder konkav ist. *(2 Punkte)*

(e) Skizzieren Sie den Graphen von f. *(1 Punkte)*

48. Taylorreihen

Die durch $f(x) := \frac{4+x-2x^2}{3+x-6x^2-2x^3}$ definierte Funktion f sei auf einer geeigneten Umgebung X von $x_0 := 0$ definiert.

(a) Man bestimme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$f(x) = \frac{\alpha + \beta x}{1 - 2x^2} + \frac{\gamma}{3 + x} .$$

[Tipp: Man bringe den Ausdruck „auf einen Nenner“ und mache dann im Zähler einen Koeffizientenvergleich bezüglich x (Stichwort "Partialbruchzerlegung").] *(3 Punkte)*

(b) Mit Hilfe der Darstellung von f aus (a) und der geometrischen Reihe bestimme man die Taylorreihe von f an der Stelle $x_0 = 0$. *(2 Punkte)*

(c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe aus (b). *(2 Punkte)*

49. Integration und Differentiation

Berechnen Sie die folgenden (auf geeigneten Definitionsbereichen definierten) Stammfunktionen und machen Sie bei (a) bis (c) jeweils die Probe durch Differentiation.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ *(3 Punkte)*

(c) $\displaystyle\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(d) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(e) $\displaystyle\int \cos^3(x) \,\mathrm{d}x$ *(3 Punkte)*

(f) $\displaystyle\int x \arccos(x) \,\mathrm{d}x$ *(3 Punkte)*

50. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Substitutionsmethode:

(a) $\displaystyle\int_{1/\pi}^{1} \frac{\sin(1/x)}{x^2} \,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 \sqrt{1+2x^3} \,\mathrm{d}x$ *(2 Punkte)*

51. Die Kettenregel für Integrale

Bestimme $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_{-x}^{x^2} t^2 + t \,\mathrm{d}t\right)$ *(2 Punkte)*

52. Rekursive Integration

Es sei $f_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ nicht negativ, stetig und monoton steigend. Definiere rekursiv $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) \,\mathrm{d}t$$

für $n \geq 0$. Zeige, dass

$$f_{n+1}(x) \leq \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

für alle $n \geq 0$ und $x \geq 0$ gilt. [Tipp: Partielle Integration] *(4 Bonuspunkte)*

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 18. Dezember 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.