Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

4. Dezember 2020

11. Übung

43. Ab ins Krankenhaus.

(a) Bestimme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\tan(2x)}$. *(2 Punkte)*

(b) Zeige: $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$. *(3 Punkte)*

(c) Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *(1 Punkt)*

(d) Bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ für $\alpha, \beta > 0$. *(2 Punkte)*

(e) Zeige $\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$ und bestimme $\lim\limits_{x\to 0+} (x \cdot \ln x)$. *(2+2 Punkte)*

44. Achtung die Kurve!

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\exp(x)-\exp(3x)}{\exp(4x)-1} & \text{für } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeige $f(x) = \frac{-\exp(x)}{\exp(2x)+1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *(2 Punkte)*

(b) Untersuche f auf lokale Extrema. Sind diese (falls existent) auch *globale* Extrema? *(3 Punkte)*

(c) Untersuche f auf Monotonie und bestimme das Verhalten für $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. *(2 Punkte)*

(d) Bestimme den Wertebereich von f. *(2 Punkte)*

45. Achtung die Kurve! II

Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}$$

(a) Bestimme die Nullstelle(n) von f. *(2 Bonuspunkte)*

(b) Zeige, dass f unendlich oft differenzierbar ist. *(3 Bonuspunkte)*

(c) Untersuche f auf lokale Extrema. Sind diese (falls existent) auch *globale* Extrema? *(2 Bonuspunkte)*

(d) Untersuche f auf Monotonie und bestimme das Verhalten für $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. *(3 Bonuspunkte)*

(e) Bestimme den Wertebereich von f. *(1 Bonuspunkt)*

46. Die zwei Wertsätze

(a) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = x^5 + x^3 + 3x - 3$. Beweise, dass es ein $a \in [0,1]$ mit $p(a) = 0$ gibt. Beweise, dass dies a die einige Lösung von $p(x) = 0$ ist. *(3 Punkte)*

(b) Zeige, dass $|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. *(2 Punkte)*

(c) Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g'$. Zeige, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$ gibt. *(2 Punkte)*

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 11. Dezember 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.