Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

27. November 2020

10. Übung

38. Fixpunkt.

(a) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 0$. Beweise, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert so dass $f(x_0) = x_0$. *(3 Punkte)*

(b) Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeige, dass f mindestens einen Fixpunkt hat, das heißt es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$. *(3 Bonuspunkte)*

39. Differenzierbarkeit

Alte Version: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $c \in (a,b)$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $q(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ auf $x \in (a,b) \setminus \{c\}$. Zeige man, dass f in c differenzierbar (Definition 7.1) genau so wenn $\lim\limits_{x\to c} q(x)$ existiert. In diesem Fall, warum muss $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} q(x)$ sein?

Neue Version (30. November 2020): Es gibt ein Problem: wir haben noch nicht die Grenzwerte von Funktionen definiert. Das ist Definition 7.18 im Skript. Deshalb gebe ich Ihnen eine neue Version.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $c \in (a,b)$ und $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $q(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ auf $x \in (a,b) \setminus \{c\}$.
Zeige man, dass f in c differenzierbar (Definition 7.1) genau so wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b) \setminus \{c\}$, die gegen c konvergiert, die Folge $(q(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. In diesem Fall, warum muss $f'(c) = \lim\limits_{n\to\infty} q(x_n)$ sein?

(5 Punkte)

40. Elementary, my dear Watson!

(a) Was ist die Ableitung von $\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{2m+1}$? Benutze man Beispiel 7.4(v). *(2 Punkte)*

(b) Berechne mit Satz 7.5 die Ableitung von

- **(i)** $\cos x + \frac{3}{x^2} - 2^x$ *(2 Punkte)*
- **(ii)** $x^4 \ln x$ *(1 Punkt)*
- **(iii)** $\frac{\sin x}{x}$ *(1 Punkt)*
- **(iv)** $\exp(-x^2)$ *(1 Punkt)*

(c) Die Funktionen aus Beispiele 7.4(ii)-(iv),(vi)-(viii) und 7.8(i)-(xii) heißen *elementare Funktionen.* Wenn f und g elementare Funktionen sind, sind $f+g$, fg und $f \circ g$ auch elementar. Hat jede elementare Funktion eine Ableitung? Ist die Ableitung elementar? Warum oder warum nicht? *(1 Punkt)*

41. Hinreichende Kriterien für Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer mit $0 \in X$ sowie $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\alpha, C > 0$.

(a) Es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^\alpha$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 := 0$ stetig ist mit $f(0) = 0$. *(2 Punkte)*

(b) Nun sei X sogar eine Umgebung von 0 und es gelte $|f(x)| \leq C \cdot |x|^{1+\alpha}$ für alle $x \in X$. Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit $f(0) = f'(0) = 0$. *(3 Punkte)*

(c) Sei nun

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} |x|^{1+\alpha} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Folgern Sie aus (a) und (b), dass f sowohl stetig, als auch differenzierbar ist. Für welche $\alpha > 0$ ist die Funktion f' in einer Umgebung um 0 unbeschränkt? Für welche $\alpha > 0$ ist f *stetig* differenzierbar? *(2 Bonuspunkte)*

42. Tangens tanzen.

(a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Zeige, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ unter dieser Substituion gebrochen rationale Funktionen von t sind. [Man darf das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) verwenden.] *(3 Punkte)*

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\left|\frac{1+it}{1-it}\right| = 1$. *(1 Punkt)*

(c) Zeige, dass

$$\arctan(t) = \frac{1}{2} \arg\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$$

[*Tipp:* Sei $\theta = \arg\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$ und schreib $\frac{1+it}{1-it}$ in Polardarstellung.] *(3 Punkte)*

43. Die Produktregel für n-te Ableitungen

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-fach differenzierbare Funktionen und $h := f \cdot g : I \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie: h ist n-fach differenzierbar und für die n-te Ableitung $h^{(n)}$ gilt für alle $x \in I$

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

(mit der Konvention $f^{(0)} := f$). Dabei bezeichnen $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$ die entsprechenden Binomialkoeffizienten. *(5 Bonuspunkte)*

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 4. Dezember 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.