Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

20. November 2020

9. Übung

34. Spielwiese der Stetigkeit.

(a) Man zeige durch unmittelbare Anwendung der (ε, δ)-Definition der Stetigkeit (Definition 5.13), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$$

an der Stelle $x = 2$ stetig ist. *(2 Punkte)*

(b) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. *(3 Punkte)*

(c) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

stetig (beweise man Beispiel 5.19(i)), und auch gleichmäßig stetig ist. *(2 Punkte)*

(d) Man zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ x & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

stetig ist. [Tipp. Benutze die Idee von Aufgabe 25 für Stetigkeit in 0] *(3 Punkte)*

(e) Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x},$$

von der wir bereits aus Aufgabe 32 "Stetigkeit unter der Erde" wissen, dass sie stetig ist.

(i) Zeigen Sie, dass $f|_{[1,\infty)}$, d.h. die Einschränkung von f auf das Intervall $[1, \infty)$, Lipschitz-stetig ist.

(2 Bonuspunkte)

(ii) Zeigen Sie, dass f auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig auf $[0, \infty)$ ist. [Tipp: Satz 5.22] *(4 Bonuspunkte)*

35. Quantorendschungel Part II

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Nach Definition 5.20 heißt f *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X : (\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$$

Welche der folgenden Aussagen sind *äquivalent* zur gleichmäßigen Stetigkeit von f? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder einem Gegenbeispiel.

(a) $\exists\delta > 0\ \forall\epsilon > 0\ \forall x_1, x_2 \in X : (\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(2 Punkte)*

(b) $\forall x_0 \in X\ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in B(x_0, \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ *(2 Punkte)*
(mit $B(x_0, \delta)$ ist hierbei der Ball in X um x_0 mit Radius δ gemeint, vgl. Definition 5.1)

(c) $\forall\epsilon > 0\ \exists c > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X : (\ |x_1 - x_2| < c\delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon)$ *(2 Punkte)*

(d) $\forall\epsilon > 0\ \exists c > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X : (\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < c\epsilon)$ *(2 Punkte)*

36. Punktweise oder Gleichmäßig.

Wir definieren die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 2n^2 x & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2 x & \text{falls } \frac{1}{2n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(1 Punkt)*

(b) Zeigen Sie, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist. *(2 Punkte)*
[Tipp: Aufgabe 34(d).]

(c) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. *(2 Punkte)*

(d) Untersuchen Sie, ob die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist.
[Tipp: Bestimmen Sie zuerst die einzig mögliche Grenzwertfunktion f für den gleichmäßigen Grenzwert der (f_n), und finde sodann für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x \in \mathbb{R}$, so dass $|f_n(x) - f(x)|$ maximal wird.] *(3 Punkte)*

37. Die kalte Erde.

Bestimme, mit Polardarstellung, alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden.
[Vergleichene mit 16(b). Das Eckige im Runden.] *(3 Punkte)*

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 27. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.