Martin Schmidt
Ross Ogilvie

13. November 2020

Analysis I

8. Übung

29. Konvergenz im Quadrat (no Mannheim-pun intended).

Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge.

(a) Beweise: Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ absolut. *(4 Punkte)*

(b) Belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Umkehrung von (a) falsch ist. *(1 Punkt)*

(c) Belege durch Angabe eines Beispiels, dass die Aussage von (a) falsch wird, wenn man „absolute Konvergenz" jeweils durch „Konvergenz" ersetzt *(1 Punkt)*

30. Konvergenz in der Potenz (no Mannheim-pun possible).

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Wir untersuchen die hierdurch bestimmte Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

(a) Beweise: Falls $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt und die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ einen Grenzwert α besitzt, so ist $R := \frac{1}{\alpha}$ der Konvergenzradius obiger Potenzreihe. *(3 Punkte)*

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^{n-2}}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Bestimme $\alpha_1 := \underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, $\alpha_2 := \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, sowie den Konvergenzradius R der zugehörigen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ und folgere, dass $R \neq \frac{1}{\alpha_1}$ und $R \neq \frac{1}{\alpha_2}$ gilt.
Bemerkung: Dies zeigt, dass im Allgemeinen die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zur Bestimmung des Konvergenzradius nicht geeignet ist. *(4 Punkte)*

31. Über den Sinus hyperbolicus und den Cosinus hyperbolicus. Für $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\cosh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{und} \quad \sinh(x) := \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,.$$

(a) Schreiben Sie $\cosh(x)$ und $\sinh(x)$ jeweils als Potenzreihe in $x \in \mathbb{K}$. *(4 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{K}$ die folgenden Identitäten gelten:

(i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,.$ *(2 Punkte)*

(ii) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cdot\cosh(y) + \sinh(x)\cdot\sinh(y)\,.$ *(2 Bonuspunkte)*

(iii) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cdot\cosh(y) + \cosh(x)\cdot\sinh(y)\,.$ *(2 Bonuspunkte)*

32. Stetigkeit unter der Erde.

Zeige, dass die Wurzelfunktion

$$\begin{aligned} [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

stetig ist. [Tipp: Man unterscheide die Fälle $x = 0$ und $x > 0$.] *(5 Punkte)*

33. Ziemlich groß!

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zum Intervall $(0, 1)$. [Tipp: Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{2+2|x|} + \frac{1}{2}$ eine Bijektion zwischen den betrachteten Mengen ist.] *(4 Bonuspunkte)*

(b) Sei U eine beliebige unendliche Menge und A eine beliebige höchstens abzählbare Menge mit $U \cap A = \emptyset$. Zeigen Sie, dass U gleichmächtig zu $U \cup A$ ist. [Tipp: Satz 2.40(ii) mag hilfreich sein. *Bemerkung:* Jede unendliche Menge enthält eine Teilmenge, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.] *(4 Bonuspunkte)*

(c) Sei N die Menge aller konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Zeigen Sie, dass N abzählbar ist. *(3 Bonuspunkte)*

(d) Folgern Sie mit Hilfe von (a),(b),(c), dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist. [Tipp: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kann mit den Folgen identifiziert werden, die Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, vgl. die Bemerkung nach Satz 2.52 (warum darf man das?). Denken Sie auch an Abschnitt 4.2.] *(4 Bonuspunkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 20. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.