Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

6. November 2020

7. Übung

25. Zweierlei.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent sind. Sei H die Menge der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
Beweisen Sie, dass $H = \{\lim_{n\to\infty} a_{2n}, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}\}$ gilt.

[*Bemerkung:* Bei reellen Teilfolgen mit $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \pm\infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \pm\infty$ gilt die Aussage ebenfalls, das brauchen Sie aber nicht zu zeigen.] *(4 Punkte)*

26. Monotonangebend.

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, reelle Zahlenfolge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Zeige, dass dann $(n \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
(3 Punkte)

[Tipp: Man verwende entweder das Cauchy-Kriterium für Reihen (Satz 4.3) oder Cauchy's Verdichtungssatz (Satz 4.12).]

(b) Bleibt die Aussage von (a) richtig, wenn man auf die Voraussetzung, dass $(a_n)_n$ monoton fallend sein soll, verzichtet? Man gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
(2 Zusatzpunkte)

27. Drei(h)erlei.
Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$. (Die Grenzwerte brauchen nicht berechnet zu werden.)

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k-1}}$ *(2 Punkte)*

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^5}$ *(2 Punkte)*

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)^k}{(2k+1)^k}$ *(3 Punkte)*

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+14k+30}{2k^4+2k^3+k+12}$ *(2 Punkte)*

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *(2 Punkte)*

(f) $\displaystyle\sum_{k=101}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ *(1 Punkt)*

28. Bruchlandung.

Beweise, dass die folgende Reihe in $\mathbb{R}$ konvergent ist und berechne ihren Grenzwert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \,. \qquad \textit{(3 Punkte)}$$

[Tipp: Man schreibe $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{\alpha}{2k+1} + \frac{\beta}{2k+3}$ mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.]

29. Zone of Danger?

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \, x^n$ *(2 Punkte)*

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \, x^n$ *(2 Punkte)*

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \, x^n$ *(2 Punkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 13. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.

Kleine Aufgabensammlung.

Diese Aufgabe dient zum Einüben möglicher (insbesondere nicht garantierter!) Typen von Klausuraufgaben aus der Zwischenklausur. Sie wird nicht bewertet und ist rein als Angebot zur Selbstkontrolle zu verstehen. Die Länge dieser Aufgabe lässt auch keine Rückschlüsse auf die Länge der Klausur zu. Bitte beachte auch insbesondere die gewerteten Aufgaben dieses Übungszettels.

1. Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $\Im(z^2) = 2$ erfüllen, und skizziere die Lösungsmenge.

2. Beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

3. Wir betrachten die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{1+t}\ .$$

(a) Zeige, dass f streng monoton wachsend ist.

(b) Bestimme Supremum und Infimum der Menge $\{\, f(n) \,|\, n \in \mathbb{N} \}$ und untersuche, ob diese Menge ein Maximum und/oder ein Minimum besitzt.

4. Man bestimme für die folgenden Folgen alle ihre Häufungspunkte, und untersuche, ob sie in $\mathbb{K}$ konvergieren.

(a) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(b) $c_n := (1 - \frac{1}{n})^n$

(c) $d_n := (1 + \imath^n) \cdot \frac{6n+7}{3n+2}$

5. Beweise: Jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen.

6. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Zahlenfolgen, die sich nur in endlich vielen Gliedern voneinander unterscheiden, d.h. für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = b_n$. Zeige, dass dann (a_n) genau dann in $\mathbb{K}$ konvergiert, wenn (b_n) in $\mathbb{K}$ konvergiert, und dass im Falle der Konvergenz die Grenzwerte dieser beiden Folgen übereinstimmen.

7. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Zahlenfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$b_n := \sup\{\, a_k \,|\, k \geq n \,\}$$

definierte Folge. Zeige:

(a) Die Folge (b_n) ist eine reelle Zahlenfolge, sie ist monoton fallend und nach unten beschränkt.

(b) Die Folge (b_n) ist in $\mathbb{R}$ konvergent, und zwar gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim}\, a_n$.