Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

30. Oktober 2020

6. Übung

21. Quantorendschungel.
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent dazu, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder Gegenbeispiel.

(a) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N\, :\, |a_n - a| < \frac{1}{\varepsilon}$. *(2 Punkte)*

(b) $\exists\, c > 0\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N\, :\, |a_n - a| < c\varepsilon$. *(2 Punkte)*

(c) $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, c > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N\, :\, |a_n - a| < c\varepsilon$. *(2 Punkte)*

(d) $\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq N\, :\, |a_n - a| < \varepsilon$. *(2 Punkte)*

22. Double or Nothing.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$a_n := \frac{n^k}{2^n} \tag{1}$$

eine Nullfolge ist.

(a) Es folgt von dem Binomische Formel 3.24, dass $2^n \geq \binom{n}{k+1}$ für $k+1 \leq n$. Zeige, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$$\frac{n^k}{2^n} \leq \frac{(k+1)!}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k}{n}\right)}$$

für alle $n \geq N$ gilt. *(3 Punkte)*

(b) Zeige, durch vollständige Induktion zusammen mit die Grenzwertsätze, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m}{n}\right)} = 0.$$

(3 Punkte)

(c) Kombiniere (a) und (b) um die Aussage zu zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. *(2 Punkte)*

23. Unnötig.

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen ein $a \in \mathbb{K}$ konvergiert. Zeige, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

ebenfalls gegen a konvergiert. *(4 Punkte)*

(b) Man gebe ein Beispiel einer divergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, bei dem die wie in (a) definierte Folge (b_n) konvergiert. *(2 Punkte)*

(c) Gibt es eine divergente reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $a_n \geq 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft, dass die in (a) definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert? *(4 Punkte)*

24. In einem Land vor unserer Zeit.

Bereits vor 4000 Jahren war den Sumerern ein Iterationsprozess bekannt, der bei Eingabe einer Zahl $a > 0$ eine Näherung für $\sqrt{a}$ liefert. Wir formulieren diesen hier speziell für $a = 2$ (also zur Näherung an $\sqrt{2}$): Dazu definieren wir eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv wie folgt:

$$x_0 := \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \; : \; x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) .$$

(a) Mithilfe eines (Taschen-)Rechners berechne man x_1, x_2, x_3 und x_4. Sieht man daran schon, wie sich die x_n an $\sqrt{2}$ annähern? *(2 Punkte)*

Wir schreiben im Folgenden die x_n als Brüche, d.h. wir schreiben $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_n, q_n \in \mathbb{N}$ und den Startwerten $p_0 := 3$ und $q_0 := 2$.

(b) Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2$ und $q_{n+1} = 2p_n q_n$. *(2 Punkte)*

(c) Zeigen Sie, dass $p_{n+1} - \sqrt{2}q_{n+1} = (p_n - \sqrt{2}q_n)^2$ und somit $x_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(2 Punkte)*

(d) Warum kann in der letzten Ungleichung keine Gleichheit gelten? *(1 Punkte)*

(e) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge ist. Warum muss sie konvergieren? *(2 Punkte)*

(f) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. *(3 Punkte)*

(g) Man zeige $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = (p_n^2 - 2q_n^2)^2$ und folgere hieraus durch vollständige Induktion, dass $p_n^2 - 2q_n^2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(2 Bonuspunkte)*

(h) Man folgere aus (c) und (g), dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\left| \tfrac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{q_n^2}$$ *(3 Bonuspunkte)*

(i) Zeigen Sie mit Hilfe von (g) und (f), dass

$$\lim_{n\to\infty} q_n^2 \left(\frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

gilt und folgern Sie mit (h), dass $c := \frac{1}{2\sqrt{2}}$ die kleinste (und somit bestmögliche) Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist, so dass

$$\left| \tfrac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| < c \cdot \frac{1}{q_n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. *(3 Bonuspunkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 6. November 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.