Martin Schmidt
Ross Ogilvie

Analysis I

23. Oktober 2020

5. Übung

16. Das Eckige im Runden.

(a) Schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$ *(2 Punkte)*

(ii) $\frac{3+i}{4-i}$ *(2 Punkte)*

(iii) $\frac{(1+2i)^3-(1+i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ *(3 Punkte)*

(b) Bestimme alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 = 1$, und markiere ihre Lage in der komplexen Zahlenebene. Zeige außerdem, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden.
[Tipp: $z^3 - 1 = (z-1) \cdot (z^2 + z + 1)$.] *(3 Punkte)*

17. Runde Sache.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Gleichung

$$z^2 + 2az + 1 = 0$$

genau dann keine reelle Lösungen hat, wenn $|a| < 1$. Zeige außerdem, dass in diesem Fall die Gleichung zwei komplex konjugierte Lösungen hat, die in der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ liegen.
[*Tipp:* Benutze die quadratische Ergänzung.] *(4 Punkte)*

18. Kunstkurs.

Beschreibe die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und skizziere sie in der komplexen Zahlenebene, indem Sie die Mengen vorher geeignet umformen:

(a) $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ *(2 Punkte)*

(b) $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < |z + 2|\}$ *(3 Punkte)*

(c) $C := \{z \in \mathbb{C} : \Im((1 + i)z) \geq 1\}$ *(3 Punkte)*

19. Unwahre Umkehrungen.

(a) Untersuchen Sie die im Folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $a_n := \frac{(-1)^n}{n}$ *(2 Punkte)*

(ii) $b_n := \frac{1+n^2}{2+3n+n^2}$ *(2 Punkte)*

(iii) $c_n := \frac{2^n+3^n}{5^n}$ *(2 Punkte)*

(b) Man finde jeweils ein Beispiel für reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ggf. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den folgenden Eigenschaften, und zeige, dass das Beispiel tatsächlich die Eigenschaften besitzt.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt, aber es gilt nicht $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. *(1 Punkt)*

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$. *(1 Punkt)*

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene Zahl ist. *(1 Punkt)*

(iv) $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. *(2 Punkte)*

Bitte beachten Sie: Wenn Sie eine vorangehende (Teil-)aufgabe nicht lösen können, dann dürfen Sie trotzdem die Aussage benutzen, um andere (Teil-)aufgaben zu zu lösen.

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 30. Oktober 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.