Martin Schmidt
Ross Ogilvie

9. Oktober 2020

Analysis I

3. Übung

8. Elementare Rechnenregeln.
Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Regeln:

(a) $\big(a < b$ und $c < d\big) \implies a + c < b + d\,.$ *(2 Punkte)*

(b) $\big(0 < a < b$ und $0 < c < d\big) \implies ac < bd\,.$ *(2 Punkte)*

(c) $ab > 0 \iff \big(a > 0, b > 0$ oder $a < 0, b < 0\big)\,.$ *(4 Punkte)*

(d) $ab < 0 \iff \big(a > 0, b < 0$ oder $a < 0, b > 0\big)\,.$ *2 Punkte)*

9. Eine Ecke mehr.

(a) Zeigen Sie: Für $x > 0$ gilt $x + x^{-1} \geq 2$. *(3 Punkte)*

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die sog. *Parallelogrammungleichung*: $|a + b| + |a - b| \geq |a| + |b|$.
[Tipp: Man zeige zuerst $|a + b| + |a - b| \geq 2\,|a|$.] *(3 Punkte)*

10. Grundschulmathematik.

Man zeige:

(a) die berühmte Gaußsche Summenformel: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *(3 Punkte)*

(b) $n^2 \leq 2^n$ für jede natürliche Zahl $n \neq 3$. *(4 Punkte)*

(c) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar. *(3 Punkte)*
[Tipp. Wenn $10^n + 18n - 28$ durch 27 teilbar ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ so dass $10^n = 27m - 18n + 28$.]

11. Endlich beschränkt.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion: Jede endliche, nicht-leere Teilmenge von einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ besitzt ein Maximum. (Der Beweis für das Minimum geht analog.)

(3 Punkte)

Die Lösungen müssen bis spätestens **Freitag, den 16. Oktober 2020, 10:00 Uhr** per E-Mail an Ihren Tutor gesendet.