

Kapitel 7

Differenzierbare Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$$

7.1 Definition der Ableitung

Definition 7.1. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ eine Funktion auf einer Teilmenge X von \mathbb{R} (bzw. \mathbb{C}), die eine Umgebung von $x_0 \in X$ ist. Dann heißt f im Punkt x_0 (komplex) differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathbb{K}$ gibt, so dass die folgende Funktion stetig in x_0 ist:

$$X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Wenn X offen und f in allen $x \in X$ differenzierbar ist, heißt f differenzierbar und die Funktion $f' : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$ heißt Ableitung von f .

Satz 7.2. Sei f im Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f im Punkt x_0 auch stetig.

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{für } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Wir benutzen das Kriterium in Satz 5.14 (iii). Dann folgt die Aussage aus der Stetigkeit von $x \mapsto x - x_0$ und den Rechenregeln für Folgen in Satz 3.5 (i) und (iii). **q.e.d.**

Definition 7.3. Das Differential von f im Punkt x_0 ist die lineare Abbildung $df(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, \quad h \mapsto f'(x_0)h$. Die Gerade $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)\}$ heißt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Dabei ist

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}.$$

Die Sekante durch zwei Punkte $(x_0, f(x_0)) \neq (x_1, f(x_1))$ des Graphen ist gegeben durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}(f(x_1) - f(x_0))\}.$$

Im Grenzwert $x_1 \rightarrow x_0$ nähert sich die Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ an die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an.

Beispiel 7.4. (i) $f(x) = |x|$. Für $x_0 = 0$ ist $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$ Also

ist f im Punkt $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar.

(ii) $f(x) = c \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

(iii) $f(x) = x \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 1$.

(iv) $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. $\implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}$ für alle $x \neq x_0$. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

(v) Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$ auch ein Potenzreihe mit Konvergenzradius R und wegen Satz 4.28 (iv) stetig. Deshalb ist f in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = a_1$. Aus Satz 4.29 (ii) folgt, dass f für alle $x \in B(0, R)$ in x differenzierbar und die Ableitung $f'(x)$ gegeben ist durch die Potenzreihe $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ mit Konvergenzradius R .

(vi)

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

(vii)

$$\sin'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).$$

(viii)

$$\cos'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{(2k)!} = - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{2l+1}}{(2l+1)!} = -\sin(x).$$

7.2 Rechenregeln der Ableitung

Satz 7.5. Seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind auch die Funktionen λf , $f + g$ und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0) & (f + g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) & & \text{(Leibnizregel).} \end{aligned}$$

Wenn $f(x_0) \neq 0$ dann ist $X' = f^{-1}[\mathbb{K} \setminus \{0\}]$ wegen Satz 7.2 eine Umgebung von x_0 und $\frac{1}{f} : X' \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ in x_0 differenzierbar mit $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Beweis: Für $x \neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\lambda f(x) - \lambda f(x_0)}{x - x_0} &= \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x_0 - x_0} && \text{und} \\ \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) && \text{und} \\ \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} &= -\frac{f(x) - f(x_0)}{f(x)f(x_0)(x - x_0)}. \end{aligned}$$

Also folgt die Aussage aus Beispiel 5.19 und Satz 7.2.

q.e.d.

Satz 7.6 (Kettenregel). Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen und $X \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von x_0 und $Y \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von $f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist und g in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Beweis: $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, wobei wir den linken Faktor für $f(x) = f(x_0) = y_0$ durch $g'(y_0)$ ersetzen. Dieser linke Faktor ist die Komposition von $x \mapsto f(x)$ mit $y \mapsto \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ für $y \neq y_0$ und $y_0 \rightarrow g'(y_0)$, also wegen Satz 5.16 und Satz 7.2 in x_0 stetig. Also folgt die Behauptung aus Beispiel 5.19. **q.e.d.**

Satz 7.7 (Ableitung der Umkehrfunktion). Sei $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Funktion von einer Umgebung $X \subset \mathbb{R}$ von x_0 auf eine Umgebung $Y \subset \mathbb{R}$ von $y_0 = f(x_0)$. Wenn f in x_0 differenzierbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$ und entweder f auf einer Umgebung von x_0 oder f^{-1} in y_0 stetig ist, dann ist auch f^{-1} in y_0 differenzierbar mit $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beweis: $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ für $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$. Die erste der beiden folgenden Funktionen ist die Komposition von $y \rightarrow f^{-1}(y)$ mit der zweiten

$$y \mapsto \begin{cases} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} & \text{für } y \neq y_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } y = y_0 \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{für } x \neq x_0 \Leftrightarrow f(x) \neq f(x_0) \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{für } x = x_0 \end{cases}.$$

Der Satz folgt aus Korollar 5.16, Beispiel 5.19 (iii) und Korollar 6.5.

q.e.d.

Beispiel 7.8. (i) $\ln(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(y)} = \frac{1}{\exp(y)} = \frac{1}{x} \text{ mit } \exp(y) = x.$$

(ii) $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad x \mapsto \arcsin(x)$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \sin(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

(iii) $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ mit } \cos(y) = x \text{ und } x^2 \neq 1.$$

(iv) $\cdot^\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

$$(\cdot^\alpha)'(x) = \exp(\alpha \ln(x))' = \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

(v) $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x, a \in (0, \infty).$

$$(a)'(x) = \exp(x \cdot \ln(a))' = \exp(x \ln(a)) \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x.$$

(vi) Quotientenregel. Seien f und g in x_0 differenzierbar und $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0)} g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(vii) $x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(viii) $x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x) \sin(x) - \cos(x) \cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

(ix) $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x)$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ mit } \tan(y) = x.$$

(x) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), \quad x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2(y)} = \frac{-1}{1 + x^2} \text{ mit } \cot(y) = x.$$

(xi) $\log_a(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) \quad \log_a'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{x \ln(a)}.$

(xii) $x^x : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto x^x$

$$(x^x)' = \exp(x \cdot \ln(x))' = \exp(x \cdot \ln(x)) \left(\ln(x) + x \frac{1}{x} \right) = (\ln(x) + 1) \cdot x^x.$$

(xiii) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist zwar differenzierbar, aber f' ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig.

7.3 Mittelwertsatz und Monotonie

Definition 7.9 (lokale Maxima und Minima). Eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ hat bei $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Maximum bzw. Minimum, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ gilt. Bei strikten Ungleichungen sprechen wir von strikten lokalen Maxima und Minima.

Wenn für eine bei x_0 differenzierbaren Funktion $f'(x_0)$ nicht verschwindet, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < |f'(x_0)|$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt. Dort hat $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ das gleiche Vorzeichen wie $f'(x_0)$. Dann gilt entweder $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ oder $f(x) > f(x_0)$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f(x) < f(x_0)$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Das zeigt

Lemma 7.10. Ein differenzierbarer lokaler Extremwert ist eine Nullstelle von f' . **q.e.d.**

Definition 7.11 (kritischer Punkt und kritischer Wert). *Eine Nullstelle der Ableitung einer differenzierbaren Funktion heißt kritischer Punkt. Der entsprechende Funktionswert heißt kritischer Wert.*

Kandidaten für die Minima und Maxima einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sind

- (i) Kritische Punkte in (a, b) ,
- (ii) Randpunkte, also entweder a oder b ,
- (iii) und Punkte in (a, b) an denen f nicht differenzierbar ist.

Satz 7.12 (Satz von Rolle). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: Wegen Satz 5.26 gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$. Wenn x_1 und x_2 beide am Rand liegen, $x_1, x_2 \in \{a, b\}$, dann muss f konstant gleich $f(a) = f(b)$ sein. Also gilt dann $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Andernfalls muss es einen lokalen Extremwert in (a, b) geben, an dem wegen Lemma 7.10 $f' = 0$ ist. **q.e.d.**

Satz 7.13 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0), \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \text{ für } g(b) \neq g(a), g'(x_0) \neq 0.$$

Die Tangente $(f(x_0), g(x_0)) + \mathbb{R}(f'(x_0), g'(x_0))$ an $\{(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ in $(f(x_0), g(x_0))$ verläuft also parallel zu der Geraden durch $(f(a), g(a))$ und $(f(b), g(b))$.

Beweis: $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 7.12. Die Ableitung ist Null für $(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0)$. **q.e.d.**

Satz 7.14 (Mittelwertsatz). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Beweis: Wende den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf f und $\mathbb{1}_{[a,b]}$ an. **q.e.d.**

Satz 7.15 (Schränkensatz). *Eine auf (a, b) differenzierbare stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitzstetig, wenn die Lipschitzkonst. $L \geq |f'(x)|$ für alle $x \in (a, b)$.*

Beweis: Für $x < y \in [a, b]$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(x_0)(y - x)$. Dann folgt $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ aus $|f'(x_0)| \leq L$. Umgekehrt folgt $|f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| \leq L$ aus $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$. **q.e.d.**

Satz 7.16 (Ableitung und Monotonie). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt*

- (i) $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b) \iff f$ ist konstant.

- (ii) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \iff f$ ist monoton steigend.
- (iii) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \iff f$ ist monoton fallend.
- (iv) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a, b) \mid f'(x) > 0\}$ ist $[a, b] \iff f$ ist streng monoton steigend.
- (v) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und der Abschluss der Menge $\{x \in (a, b) \mid f'(x) < 0\}$ ist $[a, b] \iff f$ ist streng monoton fallend.

Beweis: Weil eine Funktion genau dann konstant ist, wenn sie monoton steigend und monoton fallend ist, folgt (i) aus (ii) und (iii). Wir beweisen nur (ii) und (iv). Für $a \leq x < y \leq b$ erfüllt $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes. Aus $f'(x_0) \geq 0$ für alle $x_0 \in (a, b)$ folgt $f(y) - f(x) \geq 0$, und f ist monoton wachsend. Umgekehrt folgt $f(x_0) > f(x)$ für ein $x > x_0$ aus $f'(x_0) < 0$ und f ist nicht monoton steigend. Es folgt (ii). Monoton wachsende f sind genau dann streng monoton, wenn es kein $a \leq x < y \leq b$ gibt mit $f(x) = f(y)$. Auf $[x, y]$ ist dann f konstant und $f'(z) = 0$ für $z \in (x, y)$. Weil jede offene Menge ein solches Intervall enthält folgt (iv). **q.e.d.**

Korollar 7.17 (Isolierte kritische Punkte). Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ ein kritischer Punkt.

- (i) f' bei x_0 differenzierbar mit $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ ist ein striktes lokales Minimum.
- (ii) f' bei x_0 differenzierbar mit $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ ist ein striktes lokales Maximum.
- (iii) Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Minimum.
- (iv) Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ gilt, dann ist x_0 ein lokales Maximum. **q.e.d.**

Beispiel 7.18. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ hat die Ableitung $f'(x) = (1 - (x + 1))e^{-x} = -xe^{-x}$. Also ist sie auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend. Insbesondere ist $f(0) = 1$ ein globales Maximum. Also gilt $x + 1 \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \leq e^{y-1}$ für alle $y = x + 1 \in \mathbb{R}$.

7.4 Regel von de L'Hopital

Definition 7.19 (Grenzwerte von Funktionswerten). Für eine Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{K}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ genau dann, wenn für ein $f(a) \in \mathbb{K}$ die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in (a, b) \\ f(a) & \text{für } x = a \end{cases} \quad \text{stetig bei } x = a \text{ ist. Wir schreiben dann } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a).$$

Der analoge Grenzwert $x \rightarrow b$ wird mit $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ bezeichnet. Aufgrund der Definition der Stetigkeit existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ also genau dann, wenn es ein $f(a) \in \mathbb{K}$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit dem $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$ aus $x \in B(a, \delta) \cap (a, b)$ folgt. Wegen Satz 5.14 ist das äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b) , die gegen a konvergiert, die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

Satz 7.20 (1. Regel von de L'Hopital). *Seien $\infty < a < b < \infty$ und f und g auf (a, b) differenzierbare Funktionen mit $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$. Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Bemerkung 7.21. *Wenn die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a+} g'(x)$ existieren und der zweite nicht verschwindet, dann existiert auch $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mit $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a+} g'(x)}$.*

Beweis: Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, ist $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$ mit $a < b' \leq b$. Aus dem Mittelwertsatz folgt $g(x) = g(x) - g(a) \neq 0$ für $x \in (a, b')$. Die auf $[a, b')$ stetig fortgesetzten Funktionen f und g erfüllen die Voraussetzungen des Verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Deshalb gibt es für jedes $x \in (a, b')$ ein $x_0 \in (a, x)$ so dass $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ gilt. Wenn also der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Satz 7.22 (2. Regel von de L'Hopital). *Unter derselben Voraussetzung wie bei der 1. Regel von de L'Hopital, nur gelte $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$ statt $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$, gilt dieselbe Schlußfolgerung.*

Beweis: Wenn $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, gibt es $b' \in (a, b)$ mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b')$. Für $a < x < y < b'$ folgt $g(y) \neq g(x)$ aus dem Mittelwertsatz, und wegen dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es $x_0 \in (x, y)$ mit $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Wenn f und g die Voraussetzungen der 2. Regel von de L'Hopital erfüllen, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $y \in (a, b')$, so dass es für alle $x_0 \in (a, y)$ gilt $|\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ mit $\alpha = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dann folgt $\alpha - \frac{\epsilon}{2} < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \alpha + \frac{\epsilon}{2}$ für alle $x \in (a, y)$. Wegen $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$ gibt es ein $y_0 \in (a, y)$ so dass für alle $x \in (a, y_0)$ gilt $g(x) > \max\{g(y), 0\}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) (g(x) - g(y)) + f(y) < f(x) < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) (g(x) - g(y)) + f(y) \quad \text{oder} \\ & \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y) \left(\alpha - \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{f(y) - g(y) \left(\alpha + \frac{\epsilon}{2}\right)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$ gibt es dann auch ein $y_1 \in (a, y_0)$, so dass für alle $x \in (a, y_1)$ gilt $\alpha - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \epsilon$. Also gilt $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. **q.e.d.**

Die analogen Aussagen für die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow b-}$ gelten natürlich auch. Grenzwerte der Form $\lim_{x \rightarrow -\infty+} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \infty-} f(x)$ definieren wir als die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0-} f(1/x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(1/x)$. Wegen der Kettenregel gilt dann

$$\frac{df(\frac{1}{x})}{dx} \left(\frac{dg(\frac{1}{x})}{dx} \right)^{-1} = \frac{-1}{x^2} f'(\frac{1}{x}) \left(\frac{-1}{x^2} g'(\frac{1}{x}) \right)^{-1} = f'(\frac{1}{x}) / g'(\frac{1}{x}).$$

Deshalb gelten die analogen Aussagen auch für diese Grenzwerte.

7.5 Konvexität und Ableitungen

Definition 7.23. Eine reelle Funktion auf einem Intervall heißt konvex bzw. streng konvex, wenn für alle $a \neq b$ im Definitionsbereich und alle $t \in (0, 1)$ folgendes gilt

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad \text{bzw.} \quad f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b).$$

Satz 7.24. Für eine reelle Funktion f auf einem Intervall I ist folgendes äquivalent:

(i) f ist konvex

(ii) Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(iii) Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

(iv) Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gilt
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Die analogen Äquivalenzen zu streng konvex gelten, wenn \leq durch $<$ ersetzt wird.

Beweis: Wir können wegen der Symmetrie $(a, b, t) \leftrightarrow (b, a, 1-t)$ in (i) $a < b$ annehmen. Dann sei $x = (1-t)a + tb \in (a, b) \Leftrightarrow t = \frac{x-a}{b-a} \in (0, 1)$. Also ist (i) äquivalent zu

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)f(x) \leq (b-x)f(a) + (x-a)f(b).$$

Ersetzen wir entweder $(b-x) = (b-a) - (x-a)$, oder $(x-a) = (b-a) - (b-x)$ oder $(b-a) = (b-x) + (x-a)$, dann ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} (b-a)(f(x) - f(a)) &\leq (x-a)(f(b) - f(a)) && \Leftrightarrow && \text{(ii)} \\ (b-a)(f(x) - f(b)) &\leq (b-x)(f(a) - f(b)) && \Leftrightarrow && \text{(iii)} \\ (b-x)(f(x) - f(a)) &\leq (x-a)(f(b) - f(x)) && \Leftrightarrow && \text{(iv)}. \end{aligned}$$

Die analogen Aussagen für streng konvex lassen sich genauso beweisen, wenn wir alle Ungleichungen \leq durch $<$ ersetzen. **q.e.d.**

Korollar 7.25. Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall I , die im Inneren von I differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent:

- (i) f ist (streng) konvex
- (ii) f' ist (streng) monoton wachsend

Beweis: (i) \Rightarrow (ii): Seien $a < x < b$ Punkte im Inneren von I . Die Grenzwerte $x \rightarrow a+$ in (ii) und $x \rightarrow b-$ in (iii) aus Satz 7.24 zeigen $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$ und damit (ii). (ii) \Rightarrow (i): Für $[a, b] \subset I$ und $x \in (a, b)$ gibt es wegen dem Mittelwertsatz $y \in (a, x)$ und $z \in (x, b)$ mit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y) \leq f'(z) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$. Aus Satz 7.24 (iv) folgt (i). **q.e.d.**

Korollar 7.26. Für eine stetige reelle Funktion auf einem Intervall, die im Inneren zweimal differenzierbar ist, ist folgendes äquivalent

- (i) f ist (streng) konvex.
- (ii) $f''(x) \geq 0$ im Inneren des Intervalls (und der Abschluss der Menge $\{x \mid f''(x) > 0\}$ ist das ganze Intervall).

Dieses Korollar folgt sofort aus Korollar 7.25 und Satz 7.16. **q.e.d.**

Wenn wir die Ungleichungen zwischen den Funktionswerten alle umdrehen, so erhalten wir die analogen Aussagen für konkave Funktionen. Also ist eine Funktion f genau dann (streng) konkav, wenn die negative Funktion $-f$ (streng) konvex ist.

Übungsaufgabe 7.27. Zeige, dass die Umkehrfunktion einer (streng) konvexen bijektiven (streng) monoton wachsenden Funktion (streng) konkav ist.

Beispiel 7.28. (i) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1 \implies f'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Also ist f streng konvex.

(ii) $f(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1 \implies f'' = \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2}$. Also ist f streng konkav.

(iii) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto \exp(x) \implies \exp'' = \exp$. Also ist \exp streng konvex.

(iv) $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x) \implies \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Also ist \ln streng konkav.

Satz 7.29 (Ungleichung von Jensen)*: Sei f eine reelle konvexe Funktion auf einem Intervall. Seien x_1, \dots, x_n im Definitionsbereich und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen, die $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ erfüllen. Dann gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Beweis*: durch vollständige Induktion:

- (i) Für $n = 1$ muss $\lambda_1 = 1$ sein, so dass die Aussage klar ist.

(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Seien x_1, \dots, x_{n+1} und $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ wie gefordert. Dann definieren wir $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ und $x = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}x_n$. Also gilt $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$ und $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = 1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung $f(x) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda}f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda}f(x_n)$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit nur für $x_1 = \dots = x_n$. Weil f konvex ist folgt aber $f(\lambda x + (1 - \lambda)x_{n+1}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$. Wenn f streng konvex ist, dann gilt Gleichheit wieder nur für $x_{n+1} = x = x_1 = \dots = x_n$. **q.e.d.**

Korollar 7.30 (Ungleichung arithmetisches-geometrisches Mittel)*. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Dann gilt für positive Zahlen x_1, \dots, x_n

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Insbesondere gilt $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Gleichheit gilt nun für $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Beweis*: $-\ln$ ist streng konvex. Also folgt aus Jensen's Ungleichung

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -\lambda_1 \ln x_1 - \dots - \lambda_n \ln x_n \\ \iff \lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n &\leq \ln(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von \exp folgt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = \exp(\lambda_1 \ln x_1 + \dots + \lambda_n \ln x_n) \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Ersetzen wir x_1, \dots, x_n durch $y_1^{1/\lambda_1}, \dots, y_n^{1/\lambda_n}$ so erhalten wir

Korollar 7.31* Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positive Zahlen mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Dann gilt

$$y_1 \cdots y_n \leq \lambda_1 y_1^{1/\lambda_1} + \dots + \lambda_n y_n^{1/\lambda_n}$$

für alle $y_1, \dots, y_n \in (0, \infty)$. Gleichheit gilt nur für $y_1^{1/\lambda_1} = y_2^{1/\lambda_2} = \dots = y_n^{1/\lambda_n}$. **q.e.d.**

Korollar 7.32 (Youngsche Ungleichung). Seien $p, q \in (0, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \quad \text{für alle } x, y \in (0, \infty) \text{ und Gleichheit nur } x^p = y^q.$$

Beweis: Wegen der strengen Monotonie von \ln ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$\ln(xy) = \frac{1}{p} \ln(a) + \frac{1}{q} \ln(b) \leq \ln\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right) = \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \quad \text{mit } a = x^p \text{ und } b = y^q.$$

Weil \ln streng konkav ist, gilt diese Ungleichung und Gleichheit nur für $a = b$. **q.e.d.**

7.6 Taylorreihen

Auf offenen Intervallen I (Teilmenge von \mathbb{R}) ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder eine Funktion auf I . Die Bildung der Ableitung ist also eine lineare Abbildung $\frac{d}{dx}$, die differenzierbaren Funktionen auf I , Funktionen auf I zuordnet. Wenn die Ableitung wieder differenzierbar ist, können wir diese Abbildung nochmal anwenden und erhalten $(\frac{d}{dx})^2 f = f''$ die zweite Ableitung von f . Durch n -faches Anwenden erhalten wir gegebenenfalls dann die n -te Ableitung $(\frac{d}{dx})^n f = f^{(n)}$.

Definition 7.33. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle offenen Teilmengen $I \subset \mathbb{R}$ sei $C^n(I)$ die Menge aller n -mal stetig differenzierbaren reellen Funktionen auf I , und $C^\infty(I)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf I .

$$C(I) = C^0(I) \supset C^1(I) \supset \dots \supset C^n(I) \supset \dots \supset C^\infty(I)$$

Beispiel 7.34. (i) $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, weil $\exp^{(n)} = \exp$.

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $x \mapsto x^n \in C^\infty(\mathbb{R})$, weil $(x^n)^{(n)} = n!$ und $(x^n)^{(m)} = 0$ für $m > n$.

(iii) für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x \mapsto x^{-n} \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, weil $(x \mapsto x^{-n})^{(m)} =$

$$x \mapsto \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-m+1)}{x^{n+m}} = (-1)^m \frac{(n+m-1)(n+m-2)\dots n}{x^{n+m}}.$$

(iv) $\ln \in C^\infty((0, \infty))$ weil $\ln^{(m)}(x) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{x^m}$ für $m \geq 1$ und mit $0! = 1$.

Übungsaufgabe 7.35. Zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(i) $\frac{d^n}{dx^n} f \cdot g = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ für alle $f, g \in C^n(I)$ (Verallgemeinerte Leibnizregel).

(ii) $C^n(I)$ ist eine Unteralgebra von $C(I)$.

Aus der Rechenregel und der Kettenregel folgt auch

Korollar 7.36. (i) Die Komposition von n -mal (stetig) differenzierbaren Funktionen ist wieder n -mal (stetig) differenzierbar.

(ii) Die Umkehrfunktion einer n -mal (stetig) differenzierbaren bijektiven Funktion ist n -mal (stetig) differenzierbar, wenn die Ableitung keine Nullstellen hat. **q.e.d.**

Definition 7.37. (Taylor-Polynom) Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 n -mal differenzierbar, d.h. es gibt eine offene Umgebung $O \subset I$ von x_0 , so dass die Einschränkung von f auf O in $C^{n-1}(O)$ liegt, und $f^{(n-1)}$ in x_0 differenzierbar ist. Dann heißt

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

das Taylorpolynom von f der Ordnung n in x_0 .

Offenbar hat das Taylorpolynom der Ordnung n in x_0 die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n wie f an dem Punkt x_0 . Es ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad n , das an der Stelle x_0 die Ableitungen $f(x_0), f^{(1)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ besitzt:

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^n \implies p(x_0) = c_0, p^{(1)}(x_0) = c_1, \dots, p^{(n)}(x_0) = n!c_n.$$

Satz 7.38 (Taylorformel). *Sei $f \in C^n((a, b))$ auf (a, b) $n+1$ -mal differenzierbar. Dann gibt es für jedes $x_0 \neq x \in (a, b)$ ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x, x_0)$, so dass*

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{gilt.}$$

Beweis: Sei $x \in (a, b)$ und $g(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$ für $t \in (a, b)$. Dann gilt

$$g'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Außerdem sei $h(t) = (x-t)^{n+1}$ und $h'(t) = -(n+1)(x-t)^n$. Dann folgt aus dem verallgemeinerten Mittelwertsatz, dass es ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x, x_0)$ gibt mit

$$(g(x) - g(x_0))h'(\xi) = (h(x) - h(x_0))g'(\xi).$$

Es gilt aber $g(x) - g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x)$ und $h(x) - h(x_0) = -(x-x_0)^{n+1}$. Also folgt $f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)^{n+1}}{n!(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. **q.e.d.**

Definition 7.39 (Taylorreihe). *Für $f \in C^\infty((a, b))$ und $x_0 \in (a, b)$ heißt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ Taylorreihe von f in x_0 .*

Für $f \in C^\infty((a, b))$ und $x_0, x \in (a, b)$ gibt es drei Möglichkeiten:

- (i) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x gegen $f(x)$.
- (ii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x , aber nicht gegen $f(x)$.
- (iii) Die Taylorreihe von f in x_0 konvergiert an dem Punkt x nicht.

Korollar 7.40. *Sei $f \in C^\infty((a, b))$ und $x \neq x_0 \in (a, b)$. Dann konvergiert die Taylorreihe von f in x_0 an dem Punkt x gegen $f(x)$, wenn auf $\xi \in (x_0, x)$ bzw. (x, x_0) die Folge $(\frac{|f^{(n)}(\xi)|}{n!}|x-x_0|^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. **q.e.d.***

Satz 7.41. *Für jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und jedes $|x_0| < R$ hat die Taylorreihe von $f(x)$ in x_0 einen Konvergenzradius nicht kleiner als $R - |x_0|$, und konvergiert auf $B(x_0, R - |x_0|)$ gegen f .*

Beweis: Wegen Beispiel 7.4 (v) stimmen bei $x_0 = 0$ die Ableitungen von f bis zur Ordnung N mit den entsprechenden Ableitungen von $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ überein. Deshalb sind $T_{n,0} = \sum_{n=0}^N a_n x^n$ die Taylorpolynome von f bei $x_0 = 0$ und f ist dort die Taylorreihe. Dann folgt die Aussage aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen (ii). **q.e.d.**

Definition 7.42. Eine Funktion $f \in C^\infty(I)$ heißt reellanalytisch bei x_0 , falls die Taylorreihe bei x_0 einen Konvergenzradius größer als Null hat und auf einer Umgebung von x_0 gegen $f(x)$ konvergiert. Sie heißt reellanalytisch, wenn das für alle $x_0 \in I$ gilt.

Also sind alle Potenzreihenfunktionen im Inneren ihres Konvergenzbereiches reellanalytisch. Umgekehrt sind alle reellanalytischen Funktionen Potenzreihenfunktionen.

Korollar 7.43.* Zwei reellanalytische Funktionen $f, g \in C^\infty((a, b))$ stimmen genau dann auf (a, b) überein, wenn ihre Taylorreihen für ein $x_0 \in (a, b)$ übereinstimmen.

Beweis*: Die folgenden Mengen sind abgeschlossen und offen, also $(a, x_0]$ bzw. $[x_0, b)$:

$$\{x \in (a, x_0] \mid f(t) = g(t) \forall t \in [x, x_0]\}, \quad \{y \in [x_0, b) \mid f(t) = g(t) \forall t \in [x_0, y]\}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Beispiel 7.44. (i) Alle Polynome und die Funktionen $\exp, \sin, \cos, x \mapsto a^x$ sind reellanalytische Funktionen auf ganz \mathbb{R} .

(ii) Wegen Satz 4.28 (iv) gibt es für jede Potenzreihenfunktion f mit $f(0) \neq 0$ und Konvergenzradius $R > 0$ ein $r > 0$, so dass $|\frac{f(0)-f(x)}{f(0)}| \leq \frac{Lr}{|f(0)|} < 1$ für alle $x \in B(0, r)$ gilt. Offenbar ist $(\frac{f(0)-f(x)}{f(0)})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ das Produkt von x^n mit einer Potenzreihe in x . Dann ist auch $\frac{1}{f(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{f(0)-f(x)}{f(0)})^n$ eine Potenzreihe, die für $x \in B(0, r)$ gegen $\frac{1}{f(0)} \frac{1}{1-(f(0)-f(x))/f(0)} = \frac{1}{f(x)}$ konvergiert, weil $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ auf $x \in [0, 1)$ stetig ist. Aus dem Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen folgt, dass der Quotient zweier Potenzreihenfunktionen reellanalytisch ist, solange beide Potenzreihenfunktionen absolut konvergieren und der Nenner nicht verschwindet. Also sind alle rationalen Funktionen und \tan und \cot auf dem Definitionsbereich reellanalytisch.

$$\mathbf{(iii)} f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases} \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit einem Polynom p_n vom Grad $2n$, das induktiv definiert ist durch

$$p_{n+1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}(p_n(\frac{1}{x}) - p_n'(\frac{1}{x})), \quad p_0 = 1.$$

Wegen der 2. Regel von L'Hopital und der Monotonie von e^x gilt für $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-x^{-\alpha})}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(-x^{-\alpha} (1 + \beta \frac{\ln x}{x^{-\alpha}})) = 0.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ stetig, und wegen dem Mittelwertsatz

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Die Taylorreihe von f verschwindet bei $x_0 = 0$ mit allen Ableitungen. Also ist f bei $x_0 = 0$ nicht reellanalytisch aber auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.