Kapitel 6

Stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

6.1 Umkehrfunktionen

Satz 6.1 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ *stetig. Dann enthält das Bild* $f[[a, b]]$ *das abgeschlossene Intervall* $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$.

Beweis: Für $f(a) = f(b)$ ist die Aussage trivial. Sei y eine reelle Zahl im offenen Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ und $A = f^{-1}[(-\infty, y]]$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $A = f^{-1}[[y, \infty)]$ für $f(a) > f(b)$. Diese Menge enthält a, ist beschränkt und wegen der Stetigkeit von f abgeschlossen. Also ist A kompakt und besitzt ein Maximum $x = \max A$ mit $f(x) \leq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \geq y$ für $f(a) > f(b)$. Weil y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, ist $x < b$ und für alle $z \in (x, b]$ liegt $f(z)$ auf der selben Seite von y wie $f(b)$. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $(x, b]$, die gegen x konvergiert. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ und $f(x) \geq y$ für $f(a) < f(b)$ bzw. $f(x) \leq y$ für $f(a) > f(b)$. Also ist $f(x) = y$ und das Bild von f enthält neben $f(a)$ und $f(b)$ alle reellen Zahlen zwischen $f(a)$ und $f(b)$. **q.e.d.**

Korollar 6.2. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann ist* $f[I]$ *ein Intervall.*

Beweis: Sei $J = f[I]$. Für $a < b$ und $a, b \in J$ folgt aus dem Zwischenwertsatz $[a, b] \subset J$. Dann enthält J alle reelle Zahlen, die weder eine untere noch eine obere Schranke von J sind, also $(\inf J, \sup J)$. Jenachdem, ob $\min J$ bzw. $\max J$ existiert, ist dann J eines der Intervalle $(\inf J, \sup J)$, $[\min J, \sup J)$, $(\inf J, \max J]$ oder $[\min J, \max J]$. Dabei ist $\inf J = -\infty$ bzw. $\sup J = \infty$ wenn J keine untere bzw. obere Schranke hat. **q.e.d.**

Die Injektivität von solchen Funktionen ist äquivalent zur strengen Monotonie:

Definition 6.3 (Monotonie)**.** *Eine Funktion* $f : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ *auf einer Teilmenge* X *von* $\mathbb{R}$ *heißt*

monoton wachsend, *wenn* $f(x) \leq f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x \leq x'$ *gilt*

streng monoton wachsend, *wenn* $f(x) < f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x < x'$ *gilt.*

monoton fallend, *wenn* $f(x) \geq f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x \leq x'$ *gilt.*

streng monoton fallend, *wenn* $f(x) > f(x')$ *für alle* $x, x' \in X$ *mit* $x < x'$ *gilt.*

Satz 6.4. *Eine stetige reelle Funktion* f *auf einem Intervall ist genau dann injektiv, wenn* f *entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.*

Beweis: Eine auf einem Intervall stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann streng monoton, wenn $f(b) - f(a)$ für alle $a < b \in I$ nicht verschwindet und das Vorzeichen unabhängig von der Wahl von $a < b \in I$ ist, also auch wenn für alle $a < b < c \in I$ die beiden Differenzen $f(b) - f(a)$ und $f(c) - f(b)$ nicht verschwinden und untereinander das gleiche Vorzeichen haben, also $f(b)$ zwischen $f(a)$ und $f(c)$ liegt. Gilt das für $a < b < c$ nicht, dann nimmt f wegen dem Zwischenwertsatz die Werte nahe bei $f(b)$, die auf der gleichen Seite wie $f(a)$ und $f(c)$ liegen, die also sowohl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als auch zwischen $f(b)$ und $f(c)$ liegen, sowohl in (a, b) als auch in (b, c) an. Dann ist f nicht injektiv. Umgehrt folgt aus der strengen Monotonie die Injektivität. **q.e.d.**

Korollar 6.5. *Sei* f *eine reelle, stetige und injektive Funktion auf einem Intervall* I*. Dann ist die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f[I] \to I$ *stetig.*

Beweis: Jedes $x \in I$ besitzt eine Umgebung in I, die ein abgeschlossenes beschränktes Intervall ist. Das Bild solcher kompakter Intervalle ist wegen dem vorangehenden Satz und Korollar 6.2 eine Umgebung von $f(x)$ in dem Intervall $f[I]$. Dann ist f^{-1} wegen Korollar 5.18 auf dieser Umgebung von $f(x)$ stetig. Also ist f^{-1} auf $f[I]$ stetig. **q.e.d.**

Beispiel 6.6. *Für* $k \in \mathbb{N}$ *ist* $[0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^k$ *streng monoton wachsend. Dann ist die Umkehrabbildung* $[0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ *stetig und streng monoton wachsend. Dasselbe gilt für die Abbildung* $[0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ *mit Umkehrabbildung* $[0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^{\frac{q}{p}}, p, q \in \mathbb{N}$*. Für negative* $\frac{p}{q}$ *sind diese Abbildungen von* $(0, \infty)$ *nach* $(0, \infty)$ *streng monoton fallend.*

Satz 6.7. *Sei* f *eine monoton wachsende (fallende) Funktion von einem Interval* I *nach* $\mathbb{R}$*. Dann ist die Menge aller Unstetigkeitsstellen von* f *höchstens abzählbar.*

Beweis*: Wir betrachten monoton wachsende Funktionen. Für monoton fallende Funktionen verläuft der Beweis analog. Für jeden inneren Punkt ξ von I sei $f(\xi_-) = \sup\{f(x) \mid x \in I \text{ und } x < \xi\}$ und $f(\xi_+)\} = \inf\{f(x) \mid x \in I \text{ und } \xi < x\}$. Wenn $f(\xi_-) = f(\xi_+)$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ Punkte $x_-, x_+ \in I$ mit $x_- < \xi < x_+$ und

$$f(\xi_-) - \epsilon < f(x_-) \leq f(\xi_-) = f(\xi_+) \leq f(x_+) < f(\xi_+) + \epsilon.$$

Wegen der Monotonie gilt $f(\xi_-) \leq f(\xi) \leq f(\xi_+)$. Dann gilt für alle $x \in [x_-, x_+]$ auch

$$-\epsilon < f(x_-) - f(\xi_-) \leq f(x) - f(\xi) \leq f(x_+) - f(\xi_+) < \epsilon.$$

Also ist f bei solchen ξ stetig. Wenn f bei ξ stetig ist gilt $f(\xi_-) = f(\xi) = f(\xi_+)$. Die Unstetigkeitsstellen im Inneren von I bestehen also aus den ξ mit $f(\xi_-) < f(\xi_+)$. Wegen der Monotonie sind die offenen Intervall $(f(\xi_-), f(\xi_+))$ parrweise disjunkt. Wir wählen in jedem eine rationale Zahl und erhalten eine injektive Abbildung von den Unstetigkeitsstellen im Inneren von I nach $\mathbb{Q}$. Damit sind die Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der rationalen Zahlen also höchstens abzählbar. **q.e.d.**

6.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Satz 6.8 (Eigenschaften von exp)**.** **(i)** $e^0 = \exp(0) = 1$ *und* $e^1 = \exp(1) = e$.

(ii) $e^x > \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $x > 0$.

(iii) *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *folgt* $e^x < e^y$ *aus* $x < y$.

(iv) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad x \mapsto e^x$ *ist bijektiv.*

Beweis:(i) und **(ii)** folgen aus der Definition.
(iii) Aus $x < y$ folgt $y - x > 0$. Dann gilt wegen (ii) $e^{y-x} > 1$. Wegen Satz 4.21 (i) und (ii) gilt dann $e^y - e^x = (e^{y-x} - 1)e^x > 0$. Also folgt $e^x < e^y$.
(iv) Offenbar ist die Funktion wegen (iii) injektiv. Wegen $e > 1$ und Satz 3.4 gibt es für jedes $y \in (0, \infty)$ zwei $n, m \in \mathbb{N}$ mit $e^{-n} < y < e^m$. Wegen dem Zwischenwertsatz gehört dann y zum Bild von $[-n, m] \to (0, \infty), \quad x \mapsto e^x$. **q.e.d.**

Definition 6.9 (natürlicher Logarithmus)**.** *Die Umkehrfunktion von* $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$ *heißt natürlicher Logarithmus:* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$.

Wegen Korollar 6.5 ist der Logarithmus stetig.

Satz 6.10 (Eigenschaften von ln)**.** **(i)** $\ln(1) = 0$.

(ii) $\ln(e) = 1$.

(iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *für alle* $x, y \in (0, \infty)$.

(iv) $a^r = e^{\ln(a)\cdot r}$ *für alle* $r \in \mathbb{Q}$ *und* $a \in (0, \infty)$.

(v) $\ln\left(e^{ln(a)x}\right) = x\ln(a)$ *für alle* $a \in (0, \infty), x \in \mathbb{R}$.

(vi) *Für* $x, y \in (0, \infty)$ *folgt* $\ln(x) < \ln(y)$ *aus* $x < y$.

(vii) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$ *ist bijektiv.*

Beweis: **(i)** $\Leftrightarrow e^0 = 1$ und **(ii)** $\Leftrightarrow e^1 = e$ und **(iii)** $\Longleftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = (e^{\ln(x)})(e^{\ln(y)})$.
(iv) Für $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gilt $(e^{\ln(a)\frac{p}{q}})^q = e^{\ln(a)p} = a^p$ und $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} > 0$. Wegen der Eindeutigkeit der k-ten Wurzel folgt $e^{\ln(a)\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}$.
(v) ist offensichtlich.
(vi) folgt aus (iii) des vorhergehenden Satzes.
(vii) folgt aus (iv) des vorhergehenden Satzes. **q.e.d.**

Definition 6.11. *Für alle $a>0$ und alle $x\in\mathbb{R}$ sei $a^x = e^{x\ln(a)}$*

Satz 6.12 (Eigenschaften von a^x)**. (i)** $a^{x+y}=a^xa^y$ *für alle* $a\in(0,\infty),x,y\in\mathbb{R}$.

(ii) $(a^x)^y = a^{xy}$ *für alle* $a\in(0,\infty),x,y\in\mathbb{R}$.

(iii) *Für $a>1$ und $x,y\in\mathbb{R}$ folgt $a^x<a^y$ aus $x<y$.*

(iv) *Für $0<a<1$ und $x,y\in\mathbb{R}$ folgt $a^x>a^y$ aus $x<y$.*

(v) *Für $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ ist $a^{\cdot}:\mathbb{R}\to(0,\infty),\quad x\mapsto a^x$ bijektiv und stetig.*

Beweis:(i) $a^{x+y}=e^{x\ln(a)+y\ln(a)}=e^{x\ln(a)}e^{y\cdot\ln(a)}=a^xa^y$.
(ii) $(a^x)^y=e^{y\ln(e^{x\ln(a)})}=e^{y\cdot x\ln(a)}=a^{xy}$.
(iii) Für $a>1$ ist $\ln(a)>0$. Also folgt $x\ln(a)<y\ln(a)$ und $a^x<a^y$ aus $x<y$.
(iv) Für $a<1$ ist $\ln(a)<0$. Also folgt $x\ln(a)>y\ln(a)$ und $a^x>a^y$ aus $x<y$.
(v) Für $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ ist $\ln(a)\neq 0$. Also ist $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\ln(a)x$ bijektiv und stetig, und damit auch auch $\mathbb{R}\to(0,\infty),\quad x\mapsto\exp(\ln(a)x)$. **q.e.d.**

Definition 6.13 (des Logarithmus zur Basis a)**.** *Für alle $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ sei $\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ die Umkehrfunktion von $a^{\cdot}$.*

Satz 6.14 (Eigenschaften des Logarithmus zur Basis a)**. (i)** $\log_a(1)=0$

(ii) $\log_a(a)=1$

(iii) $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$

(iv) *Für $a>1$ und $x,y\in(0,\infty)$ folgt $\log_a(x)<\log_a(y)$ aus $x<y$.*

(v) *Für $0<a<1$ und $x,y\in(0,\infty)$ folgt $\log_a(x)>\log_a(y)$ aus $x<y$.*

(vi) $\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\log_a(x)$ *ist bijektiv und stetig.*

Beweis analog zum Beweis der Eigenschaften von ln. **q.e.d.**

6.3 Trigonometrische Funktionen

Satz 6.15. (i) *Für alle $x\in[-5,5]\setminus\{0\}$ gilt $1-\frac{x^2}{2}<\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.*

(ii) *Für alle $x\in[-6,6]\setminus\{0\}$ gilt $1-\frac{x^2}{6}<\frac{\sin x}{x}<1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}$.*

(iii) $\cos:[0,\sqrt{6}]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\cos(x)$ *ist streng monoton fallend.*

(iv) $\cos$ *hat auf $[0,2]$ genau eine Nullstelle, die wir mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen.*

(v) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \exp\left(\imath\frac{\pi}{2}\right) = \imath.$

(vi) $\cos(n\pi) = (-1)^n \quad \sin(n\pi) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(vii) $\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0 \quad \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

(viii) $\cos(x+n\pi) = (-1)^n\cos(x)$ *und* $\sin(x+n\pi) = (-1)^n\sin(x)$

(ix) $\cos\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = -(-1)^n\sin(x)$ *und* $\sin\left(x+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = (-1)^n\cos(x)$.

(x) $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin(x)$ *ist streng monoton steigend und bijektiv.*

(xi) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos(x)$ *ist streng monton fallend und bijektiv.*

Beweis:(i) Für alle $x \in [-5,5]$ und $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ gilt $0 \le \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} < 1$. Also ist für $x \in [-5,5]\setminus\{0\}$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{(2k)!})_{k\in\mathbb{N}_0\setminus\{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-5,5]\setminus\{0\}$ folgt dann $1-\frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ wie im Beweis zu Satz 4.14.
(ii) Für $x \in [-6,6]$ und $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ gilt $0 \le \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)} < 1$. Also ist für $x \in [-6,6]\setminus\{0\}$ die Folge $(\frac{x^{2k}}{(2k+1)!})_{k\in\mathbb{N}_0\setminus\{0,1\}}$ streng monoton fallend und positiv. Für diese $x \in [-6,6]\setminus\{0\}$ folgt wieder $1-\frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}$ wie im Beweis von Satz 4.14.
(iii) Für $x, y \in [0,\sqrt{6}]$ mit $x < y$ gilt $0 < \frac{y\pm x}{2} \le \sqrt{6}$. Aus (ii) und dem Additionstheorem folgt $\cos(x)-\cos(y) = \cos(\frac{y+x}{2}-\frac{y-x}{2}) - \cos(\frac{y+x}{2}+\frac{y-x}{2}) = 2\sin(\frac{y+x}{2})\sin(\frac{y-x}{2}) > 0$.
(iv) sin und cos sind wegen Beispiel 5.21 stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Wegen (i) ist $\cos(2) < 1-2+\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Dann folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass es eine Nullstelle in $[0,2]$ gibt. Wegen (iii) kann es höchstens eine Nullstelle geben.
(v) Wegen $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ folgt aus (iv) $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ und aus (ii) $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$. Also gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Dann folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(\imath\frac{\pi}{2}) = \imath$.
(vi) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel $\exp(n\imath\pi) = (\imath)^{2n} = (-1)^n$, also $\cos(n\pi) = (-1)^n$ und $\sin(n\pi) = 0$.
(vii) Wegen (v) folgt aus der Eulerschen Formel: $\exp((n+\frac{1}{2})\imath\pi) = (-1)^n\imath$ also $\cos((n+\frac{1}{2})\pi) = 0$ und $\sin((n+\frac{1}{2})\pi) = (-1)^n$.
(viii) Wegen (vi) folgt aus der Eulerschen Formel $\cos(x+n\pi)+\imath\sin(x+n\pi) = \exp(\imath x + n\imath\pi) = \exp(\imath x)(-1)^n = (-1)^n(\cos(x)+\imath\sin(x))$, also (viii).
(ix) Wegen (vii) folgt aus der Eulerschen Formel $\cos(x+(n+\frac{1}{2})\pi)+\imath\sin(x+(n+\frac{1}{2}\pi) = \exp(\imath x+(n+\frac{1}{2})\imath\pi) = \exp(\imath x)(-1)^n\imath = (-1)^n(\imath\cos(x)-\sin(x))$, also (ix).

(x) Aus (ix) folgt $\sin(x) = \begin{cases} -\cos(x+\frac{\pi}{2}) & \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\sin(-x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$

Dann folgt (x) aus (iii).

(xi) Aus (viii) folgt $\cos(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos(-x) = -\cos(\pi-x) & \text{für } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$

Dann folgt (xi) aus (iii). **q.e.d.**

Die Umkehrfunktionen von (xi) und (x) heißen

$$\begin{array}{lll} \text{Arcuscosinus} & \arccos : [-1,1] \to [0,\pi], & x \mapsto \arccos(x), \\ \text{Arcussinus} & \arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], & x \mapsto \arcsin(x). \end{array}$$

Arcuscosinus ist wegen (xi) streng monoton fallend und Arcussinus wegen (x) streng monoton wachsend. Beide sind wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen (ix) gilt $\sin(-x) = -\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2}+x)$ und $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

Definition 6.16 (Tangens und Cotangens)**.**

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left(\tfrac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot : \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z}\pi) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Beachte $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$ und $\cot(x+\pi) = \cot(x)$.

Satz 6.17. **(i)** $\tan : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend, stetig und bijektiv.*

(ii) $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cot(x)$ *ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.*

Beweis: Auf $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ ist sin streng monoton steigend und cos streng monoton fallend und beide positiv. Also ist tan streng monoton steigend und positiv. Aus $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt, dass tan auf $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend ist.

Für $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ gilt $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ und für $x \notin \pi\mathbb{Z}$ wegen Satz 6.15 (ix) $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$. Also ist cot auf $(0,\pi)$ streng monoton fallend.

Beide Funktionen tan und cot sind wegen Beispiel 5.19 (iii) stetig. Dann sind die Folgen $(\tan(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(-\tan(\pi - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-\cot(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ identische streng monoton fallende positive Nullfolgen. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \tan(-\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \cot(\pi - \tfrac{1}{n}) = -\infty \quad \lim_{n\to\infty} \cot(\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \tan(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{n}) = \infty.$$

Also sind $\tan : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ wegen Satz 6.1 surjektiv. **q.e.d.**

Die Umkehrfunktionen von $\tan : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ heißen

$$\begin{array}{rl} \text{Arcustangens} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), & x \mapsto \arctan(x), \\ \text{Arcuscotangens} : \mathbb{R} \to (0,\pi), & x \mapsto \operatorname{arccot}(x). \end{array}$$

Beide Funktionen sind wegen Satz 6.17 streng monoton und wegen Korollar 6.5 stetig. Wegen Satz 6.15 (ix) gilt $\cot(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(-x)$ and $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

6.4 Fundamentalsatz der Algebra

Wir übertragen unsere Erkenntnisse auf die komplexe Exponentialfunktion.

Satz 6.18 (Polardarstellung von $z \in \mathbb{C}$)**.** *Jede komplexe Zahl hat die Darstellung:*

$$z = re^{\imath\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf Addition von $2\pi n$ eindeutig und heißt Argument von z.

Beweis: Der Fall $z = 0$ ist trivial. Sei $z = x + \imath y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $y \geq 0$ sei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arccos(\frac{x}{r}) \in [0, \pi]$. Dann gilt $x = r\cos(\varphi)$ und $r\sin(\varphi) \geq 0$. Aus $\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1$ folgt $y = r\sin(\varphi)$. Wegen der Eulerschen Formel gilt dann

$$z = re^{\imath\varphi} = r\cos(\varphi) + \imath r\sin(\varphi) = x + \imath y.$$

Für $y < 0$ sei $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = -\arccos(\frac{x}{r}) \in [-\pi, 0]$. Wegen $x = r\cos(-\varphi) = r\cos(\varphi)$ und $r\sin(\varphi) \leq 0$ folgt wieder

$$z = re^{\imath\varphi} = r\cos(\varphi) + \imath r\sin(\varphi) = x + \imath y.$$

Für $(r, \varphi), (s, \vartheta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ folgt $r = |re^{\imath\varphi}| = |se^{\imath\vartheta}| = s$ aus $re^{\imath\varphi} = se^{\imath\vartheta}$ und für $r = s \neq 0$ auch $e^{\imath\varphi}e^{-\imath\vartheta} = e^{\imath(\varphi-\vartheta)} = 1$, was äquivalent ist zu $\varphi - \vartheta = 2\pi n$. **q.e.d.**

Die Multiplikation mit $e^{\imath\varphi}$ wirkt auf $z = x + \imath y$ wie $\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \binom{x}{y}$. Diese lineare Abbildung der komplexen Zahlenebene interpretieren wir als Drehung, weil sie die Länge $\sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |e^{\imath\varphi}z|$ und das Skalarprodukt erhält und Determinante 1 hat. Weil sie 1 auf $e^{\imath\varphi}$ abbildet, entspricht sie dem Winkel zwischen 1 und $e^{\imath\varphi}$. Im rechtwinkligen Dreieck ist mit diesem Winkel und auf 1 normierter Hypothenuse $\cos(\varphi)$ die gerichtete Länge der Ankathete und $\sin(\varphi)$ die gerichtete Länge der Gegenkathete.

Für kleine $\varphi > 0$ gilt $\varphi - \frac{\varphi^3}{6} < \sin(\varphi) < L(\varphi) < \sin(\varphi) + 1 - \cos(\varphi) < \varphi + \frac{\varphi^2}{2}$ für die Länge $L(\varphi)$ des Kreisegmentes zwischen 1 und $e^{\imath\varphi}$. Wir unterteilen dieses Kreisegment in n gleichgroße Kreissegemente: $e^{\imath\varphi} = (e^{\imath\frac{\varphi}{n}})^n$. Das ergibt $L(\varphi) = \lim_{n\to\infty} nL(\frac{\varphi}{n}) = \varphi$. Also entspricht φ einem Winkel, dessen Kreisegment im Einheitskreis die Länge φ hat.

Korollar 6.19. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist surjektiv und* $\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow z - z' \in 2\pi\imath\mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$. Dann gilt $e^z = e^x e^{\imath y}$. Also folgt das Korollar aus dem Satz 6.18 und der Bijektivität von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, Satz 6.8 (iv). **q.e.d.**

Korollar 6.20. *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.*

Beweis: Seien (r, φ) die Polarkoordinaten von z. Dann müssen die Polarkoordinaten $(s, \vartheta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ der Lösungen von $w^n = z$ die Gleichungen $n\vartheta = \varphi + 2\pi m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $s^n = r$ erfüllen. Also sind die Lösungen gegeben durch $s = \sqrt[n]{r}$ und $\vartheta_m = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$, wobei zwei Lösungen (s, ϑ_m) und $(s, \vartheta_{m'})$ genau dann übereinstimmen, wenn $\frac{m-m'}{n} \in \mathbb{Z}$. Also ergeben $m = 0, \ldots, n-1$ alle Lösungen. **q.e.d.**

Satz 6.21 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes komplexe Polynom $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat mindestens eine Nullstelle auf $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $z \mapsto |p(z)|$ ein Minimum z_0 hat. Danach zeigen wir mit dem Seziallfall in dem vorangehenden Korollar, dass beim Minimum $p(z_0) = 0$ gilt.

Für $|z| \geq R = 1 + 2\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + 2\left|\frac{a_0}{a_n}\right| \geq 1$ gilt

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right| + \left|-\frac{a_{n-1}}{z} - \ldots - \frac{a_0}{z^n}\right| - \left|-a_n\left(\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)\right|$$

$$\geq |a_n| - |a_n|\left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \geq |a_n|\left(1 - \frac{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|}{|z|}\right) \quad > \quad |a_n|\frac{1}{2}.$$

Also ist $|p(z)| > \frac{|a_n|}{2}|z|^n \geq \frac{|a_n|}{2}|z| > \frac{|a_n|}{2}2\frac{|a_0|}{|a_n|} = |a_0| = |p(0)|$ für alle $z \notin B(0,R)$. Auf der kompakten Menge $\overline{B(0,R)}$ nimmt $z \mapsto |p(z)|$ wegen Satz 5.26 das Minimum bei einem z_0 an. Dieses liegt in $B(0,R)$ und ist dann das Minimum auf ganz $z \in \mathbb{C}$.

Wir zeigen jetzt $p(z_0) = 0$. Andernfalls sei $p(y + z_0) = b_n y^n + \ldots + b_0$ das entsprechende Polynom in $y = z - z_0$ mit $b_n = a_n \neq 0$ und $b_0 = p(z_0) \neq 0$. Sei m das kleinste $m > 0$ mit $b_m \neq 0$. Für $|y| \leq r = \dfrac{1}{1 + 2\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right| + \ldots + 2\left|\frac{b_n}{b_m}\right|} \leq 1$ gilt dann

$$\left|b_{m+1}y^{m+1} + \ldots + b_n y^n\right| \leq |b_m||y|^m\left(\left|\frac{b_{m+1}}{b_m}\right||y| + \ldots + \left|\frac{b_n}{b_m}\right||y|\right) \leq \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$

Also gilt $$|p(z_0 + y)| \leq |b_0 + b_m y^m| + \frac{|b_m||y|^m}{2}.$$
Sei w eine Lösung der Gleichung $w^m b_m = -b_0$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $|tw| \leq r$

$$|p(z_0 + tw)| \leq |b_0||1 - t^m| + \frac{|b_0|}{2}|t|^m.$$

Insbesondere gilt $|p(z_0 + tw)| \leq |b_0|\left(1 - \frac{t^m}{2}\right) < |b_0|$ für alle $0 < t \leq \min\left\{1, \frac{r}{|w|}\right\}$.
Also sind alle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) \neq 0$ keine Minima von $z \mapsto |p(z)|$. **q.e.d.**

Korollar 6.22. *Jedes komplexe Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ zerfällt in ein Produkt von Polynomen ersten Grades.*

Beweis durch vollständige Induktion: **(i)** für $n = 1$ ist die Aussage trivial.
(ii) Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. Sei p ein beliebiges Polynom $(n+1)$-ten Grades. Wegen dem Fundamentalsatz der Algebra hat p eine Nullstelle bei $z_0 \in \mathbb{C}$. Wir schreiben p als $a_{n+1}(u + z_0)^{n+1} + \ldots + a_1(u + z_0) + a_0 = b_{n+1}u^{n+1} + \ldots + b_1 u + p(z_0)$, und erhalten p als Produkt von $u = z - z_0$ mit dem Polynom $b_{n+1}(z - z_0)^n + \ldots + b_1$, das wegen der Induktionsvoraussetzung in ein Produkt von Polynomen ersten Grades zerfällt. **q.e.d.**