

Kapitel 4

Reihen

4.1 Konvergenzkriterien

Definition 4.1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ die zu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörende Reihe. Diese Folge bezeichnen wir mit $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wenn die Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann bezeichnen wir den Grenzwert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Analog definieren wir $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=m}^n a_j$.

Beispiel 4.2. (i) Geometrische Reihe $(\sum q^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Für $q \neq 1$ hatten wir berechnet:

$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Dann folgt aus dem letzten Abschnitt

Für $|q| < 1$ ist $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n)$ konvergent: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Für $|q| \geq 1$ ist $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n)$ divergent.

Für reelles $q \geq 1$ ist $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} q^n)$ divergent: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty$.

(ii) Die ζ -Funktion ist definiert als $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ der Grenzwert (wenn er existiert) der Reihe $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$. Zunächst ist diese Reihe nur für alle rationalen Zahlen $s \in \mathbb{Q}$ definiert. Für $s = 1$ ist $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.

Beweis: Diese Reihe ist monoton wachsend. Also ist nur die Frage, ob sie beschränkt ist oder nicht. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Also

sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ jeweils die Summen $\sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{j} = 1 + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=2^{m+1}}^{2^{m+1}} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{n}{2}$. **q.e.d.**

(iii) Für $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}\right)$ gegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{1}{k \cdot k!}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{k} \frac{n+k-n}{n(n+1)\cdots(n+k)} \\ &= \frac{1}{k} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{n \cdots (n+k-1)} - \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n \cdots (n+k-1)} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(m+1) \cdots (m+k)} \right) \end{aligned}$$

Die Folge $\frac{1}{(m+1)\cdots(m+k)} < \frac{1}{m^k}$ konvergiert aber gegen Null. **q.e.d.**

Wir wenden das Cauchy Kriterium und das Monotonieprinzip auf Reihen an.

Satz 4.3 (Cauchy Kriterium für Reihen). *Die Reihe $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $|\sum_{j=n}^m a_j| < \epsilon$ für alle $m \geq n > N$ gilt. Insbesondere ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, wenn die Reihe $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$ konvergiert. **q.e.d.***

Satz 4.4 (Monotonieprinzip für Reihen). *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von nicht negativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$ genau dann, wenn sie beschränkt ist. Für den Grenzwert gilt dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{\sum_{n=1}^m a_n \mid m \in \mathbb{N}\}$. **q.e.d.***

Definition 4.5 (absolut konvergent). *Die Reihe $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|)$ konvergiert.*

Satz 4.6. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Und es gilt $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.*

Beweis: Aus der Dreiecksungleichung folgt $|\sum_{j=n}^m a_j| \leq \sum_{j=n}^m |a_j|$ für alle $m \geq n$. Also ist die Reihe einer absolut konvergenten Reihe eine Cauchyfolge und konvergiert. Insbesondere gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $|\sum_{n=1}^m a_n| \leq \sum_{n=1}^m |a_n|$. Dann erfüllen auch die Grenzwerte $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. **q.e.d.**

Aus dem Monotonieprinzip und Satz 3.5 folgt das

Satz 4.7 (Majoranten Kriterium). *Die Folgen von nicht negativen reellen Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllen $b_n \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(i) *Wenn außerdem $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$ konvergiert, dann konvergiert auch $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n)$*

(ii) *Wenn außerdem $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n)$ divergiert, dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **q.e.d.***

Beispiel 4.8. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{(n+k)^{k+1}} \leq \frac{1}{n \cdots (n+k)}$. Also folgt aus der Konvergenz von $(\sum \frac{1}{n \cdots (n+k)})$ auch die Konvergenz von $(\sum \frac{1}{n^{k+1}})_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz 4.9 (Wurzeltest). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und sei $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, wenn $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist und ansonsten $\alpha = \infty$.

(i) Falls $\alpha < 1$, dann konvergiert $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absolut.

(ii) Falls $\alpha > 1$, dann divergieren $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

Im Fall $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ kann die Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowohl konvergent als auch divergent sein. So ist z.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$. Aber die Reihe $(\sum \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent, während die Reihe $(\sum \frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist.

Beweis: (i) Sei $\alpha < 1$. Dann gibt es für jedes $\alpha < \beta < 1$ aufgrund von Satz 3.21 (i) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta \iff |a_n| \leq \beta^n$. Weil aber $(\sum \beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, ist auch $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absolut konvergent.

(ii) Sei $\alpha > 1$. Dann gibt es wieder aufgrund von Satz 3.21 (i) unendlich viele $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Also kann die Folge $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergieren. Dann sind Reihen $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchyfolgen, also divergent. **q.e.d.**

Satz 4.10 (Exponentialfunktion). Für alle $x \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\exp(x) : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aufgrund des Beispiels (v) im letzten Kapitel ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. Für $\epsilon > 0$ gibt es also

$$N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \sqrt[n]{n!} > \frac{|x| + 1}{\epsilon} \quad \text{für} \quad n \geq N \quad \implies \quad \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{|x|\epsilon}{|x| + 1} < \epsilon.$$

Deshalb ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n!}} = 0$ und die Reihe $(\sum \frac{x^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert absolut.

Satz 4.11 (Quotiententest). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(i) Falls $\overline{\lim} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, dann konvergiert $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absolut.

(ii) Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ alle $n \geq N$ erfüllen (das folgt wegen Satz 3.21 (ii) aus $\underline{\lim} |\frac{a_{m+1}}{a_m}| > 1$), dann divergieren $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis: (i) Wegen $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ (Satz 3.25) folgt (i) aus dem Wurzeltest.

(ii) Aus $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ folgt $|a_{n+1}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot |\frac{a_n}{a_{n-1}}| \cdots |\frac{a_N}{a_N}| \cdot |a_N| \geq |a_N| > 0$. Also ist $|a_n|$ keine Nullfolge und, die Reihen $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sum |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ sind divergent. **q.e.d.**

Beispiel 4.12. Für $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ und $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1$ kann die Reihe konvergieren und divergieren: Die Reihe zu $a_n = n^{-l+(-1)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ divergiert für $l = 2$ und konvergiert für $l = 3$ und hat in beiden Fällen $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ und $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$.

Satz 4.13 (Cauchy's Verdichtungssatz). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine nicht negative monoton fallende Folge. Dann konvergiert $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(\sum 2^n a_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ und $t_n = \sum_{j=0}^n 2^j a_{2^j}$. Wegen der Monotonie von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$a_{2^j} + a_{2^j+1} + \dots + a_{2^{j+1}-1} \leq 2^j a_{2^j} \leq 2(a_{2^{j-1}+1} + a_{2^{j-1}+2} + \dots + a_{2^j})$$

und für $j = 0$ gilt: $a_1 \leq a_1 \leq 2a_1$. Deshalb gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq s_{2^{n+1}-1} \leq t_n \leq 2s_{2^n}.$$

Also ist die Beschränktheit von der Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ äquivalent zu der von $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. **q.e.d.**

Die Reihe $(\sum \frac{1}{n^s})_{n \in \mathbb{N}}$ ist für $s \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ genau dann konvergent, wenn die Reihe

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{2^n}{(2^n)^s} \right) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} 2^{(1-s) \cdot n} \right)$$

konvergent ist, also für $s > 1$. \implies Für alle $s \in \mathbb{Q}$ mit $s > 1$ ist $\zeta(s)$ wohl definiert.

Satz 4.14 (Alternierende Reihe von Leibniz). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende reelle Nullfolge. Dann konvergiert $(\sum (-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Beweis: Wegen dem Monotonieprinzip sind die Glieder einer monoton fallenden Nullfolge nicht negativ. Sei $s_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m a_m$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aus der Monotonie folgt:

$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_2 \leq s_0.$$

Also ist die Folge $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend und beschränkt und $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend und beschränkt. Dann konvergieren aber beide Folgen und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

Also konvergiert die Reihe $(\sum (-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

q.e.d.

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, weil $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

4.2 Dezimalbruchdarstellung von reellen Zahlen

Als Ziffern wählen wir $Z = \{0, 1, \dots, 9\}$ (bzw. $\{0, 1, \dots, p-1\}$ mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$). Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in Z definieren wir die Zahlenfolge $(\sum x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{z_n}{p^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\sum x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen dem Majorantenkriterium und wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1$$

absolut konvergent. Also definiert $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ eine reelle Zahl in $[0, 1]$. Sei jetzt M die Menge aller Folgen $M = \{(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht gegen } p-1\}$. Wir zeigen jetzt, dass die Abbildung $M \rightarrow [0, 1), (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{p^n}$ surjektiv und injektiv ist

Bemerkung 4.15. Wir können auch fordern, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen Null konvergiert. Reelle Zahlen, deren Ziffernfolge gegen 0 konvergiert, haben auch eine Dezimalbruchdarstellung, deren Ziffernfolge gegen 9 konvergiert, z.B. $\frac{1}{2} = 0,500\dots = 0,499\dots$

Surjektiv: Sei $x \in [0, 1)$. Wir definieren $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induktiv, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{z_n}{p^n} \leq x - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} < \frac{z_n + 1}{p^n} \leq \frac{1}{p^{n-1}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{z_n}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m}, \frac{z_n + 1}{p^n} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{z_m}{p^m} \right)$$

gilt. Es folgt $0 \leq x - \sum_{m=1}^n \frac{z_m}{p^m} < \frac{1}{p^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = x$. Weil für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n} \text{ gilt, konvergiert } (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nicht gegen } p-1.$$

Injektiv: Seien $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Ziffernfolgen, mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{p^n}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ der kleinste Index mit $z_n \neq w_n$, also $\sum_{m=n}^{\infty} \frac{z_m - w_m}{p^m} = 0$ und o.B.d.A. $z_n > w_n$.

$$\Rightarrow \frac{z_n - w_n}{p^n} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{w_m - z_m}{p^m} \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^m} = \frac{p-1}{p^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^n}.$$

Also ist $z_n - w_n \leq 1$ und damit $z_n = w_n + 1$. Für alle $m > n$ gilt dann $w_m - z_m = p-1 \Rightarrow z_m = 0$ und $w_m = p-1 \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} w_m = p-1$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin M$. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 4.16. Wir ordnen den Teilmengen $A \subset \mathbb{N}$ die Folgen mit Werten in $\{0, 1\}$ zu, die nur auf den Elementen von A 1 sind. Zeige mithilfe der bijektiven Abbildung $M \simeq [0, 1)$ für $p = 2$, dass die Potenzmenge von \mathbb{N} gleichmächtig zu $(0, 1)$ und zu \mathbb{R} ist (Tipp: Zeige zuerst mit Satz 2.40, dass $(0, 1)$ gleichmächtig ist zu $(0, 1) \cup \mathbb{N}_0$).

4.3 Addition, Multiplikation, Umordnung

Aus dem Satz 3.5 folgt

Satz 4.17 (Rechenregeln für Reihen). *Die Reihen $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien konvergent, dann konvergieren auch die Reihen*

$$\left(\sum (a_n + b_n)\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\sum \lambda a_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{K}. \quad \text{q.e.d.}$$

Definition 4.18. *Für gegebene Reihen $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt die Reihe $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ das (Cauchy-)Produkt der beiden Reihen.*

Diese Definition stammt aus der Theorie der Potenzreihen. Das Produkt der beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist die Potenzreihe $(\sum c_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, d.h. wir haben alle Summanden des Produktes mit gleichen Potenzen zusammengefasst.

Satz 4.19 (Konvergenz des Produktes). *Wenn die Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ absolut konvergiert und die Reihe $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert, dann konvergiert das Produkt $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ der beiden Reihen. Wenn auch $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ absolut konvergiert, dann auch $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.*

Beweis: Mit $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ und $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B - \beta_n) + a_1 (B - \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B - \beta_0) \end{aligned}$$

Hierbei ist $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ und $\beta_n = B - B_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$. Daraus ergibt sich

$$C_n = A_n \cdot B - (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0).$$

Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B$, wenn $a_0 \beta_n + \dots + a_n \beta_0$ im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Es gibt tatsächlich $\alpha, \beta > 0$ und für jedes $\epsilon > 0$ $N, M \in \mathbb{N}$ mit

$$|\beta_n| \leq \beta \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \alpha \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \quad |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2\alpha} \quad \text{für } n \geq N, \quad |a_n| < \frac{\epsilon}{2N\beta} \quad \text{für } n \geq M.$$

Dann gilt für alle $n \geq N + M - 1$, also $n - N + 1 \geq M$:

$$\begin{aligned} |a_0 \beta_n + \dots + a_n \beta_0| &\leq |a_0 \beta_n + \dots + a_{n-N} \beta_N| + |a_{n-N+1} \beta_{N-1} + \dots + a_n \beta_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2\alpha} \sum_{k=0}^{n-N} |a_k| + N\beta \cdot \frac{\epsilon}{2N\beta} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen das Produkt der Grenzwerte von $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wenn beide konvergieren und eine absolut konvergiert. Wenn beide Reihen absolut konvergieren, dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \left(\sum_{n=0}^N |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^N |b_n| \right) \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right).$$

Also ist dann das Produkt absolut konvergent.

q.e.d.

Beispiel 4.20. Das Quadrat der Reihe $\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist nicht konvergent, obwohl die Reihe als Beispiel einer alternierenden Reihe nach Leibniz konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Die Koeffizienten des Quadrates sind gegeben durch:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}}$$

Es gilt aber $\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1} \sqrt{n+1}} = 1$. Also ist das Quadrat der Reihe keine Cauchyfolge.

q.e.d.

Satz 4.21 (Eigenschaften der Exponentialfunktion).

- (i) für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$.
- (ii) Für alle $x \in \mathbb{K}$ ist $\exp(x) \neq 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ sogar $\exp(x) > 0$.
- (iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $r \in \mathbb{Q}$ ist $\exp(rx) = (\exp(x))^r$.
- (iv) Für alle $x \in \mathbb{C}$ ist $\exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$.
- (v) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|\exp(ix)| = 1$.

Die Zahl $\exp(1)$ wird Eulersche Zahl genannt und mit e bezeichnet. Wegen (iii) gilt dann für alle $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(r) = \exp(r \cdot 1) = e^r$. Deshalb schreiben wir auch e^x für $\exp(x)$.

Beweis: (i) Wir hatten schon gesehen, dass die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergiert. Dann ist das Produkt von $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$. Wegen der binomischen Formel gilt

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Dann folgt $\exp(x)\exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$.

(ii) Wegen (i) gilt $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Also besitzt $\exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{K}$ ein Inverses und ist ungleich Null. Wegen (i) gilt $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Offenbar ist für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ $(\exp(\frac{x \cdot m}{n}))^n = \exp(x \cdot m) = (\exp(x))^m$. Also gilt auch wegen (ii) $\exp(\frac{xm}{n}) = (\exp(x))^{\frac{m}{n}}$.

(iv) $\exp(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{x}^n}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = \overline{\exp(x)}$ wegen Satz 2.56 und Satz 4.17.

(v) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix)\exp(-ix) = 1$. **q.e.d.**

Wir können jetzt für jede Zahl $y > 0$, für die es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $y = \exp(x)$ gilt, und für jedes $z \in \mathbb{R}$ die Zahl $y^z = \exp(zx)$ definieren. Wir werden später sehen, dass wir so für alle $y \in (0, \infty)$ und alle $z \in \mathbb{R}$ y^z definieren können.

Definition 4.22 (Umordnen von Reihen). Sei $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf sich selber. Dann heißt die Reihe $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Umordnung der Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Analog könnten wir auch die Umordnung von Folgen bilden. Letztere sind aber weniger interessant, weil jede Umordnung einer konvergenten Folge wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergiert (Übungsaufgabe). Dagegen gilt dies bei Reihen nicht.

Satz 4.23. Konvergiert eine Reihe $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absolut, so konvergiert auch jede Umordnung $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ absolut. In diesem Fall gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}.$$

Beweis: Sei also τ eine gegebene bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Wenn $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ absolut konvergent, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=n}^m |a_k| < \epsilon$ für alle $m \geq n > N$ gilt. Dann gibt es auch ein $M = \max\{\tau^{-1}(1), \dots, \tau^{-1}(N)\} \in \mathbb{N}$, so dass $\tau(n) > N$ für alle $n > M$ gilt. Dann folgt für alle $m \geq n > M$

$$\sum_{k=n}^m |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=N+1}^{\max\{\tau(n), \tau(n+1), \dots, \tau(m)\}} |a_k| < \epsilon.$$

Also ist $(\sum |a_{\tau(n)}|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und die Umordnung konvergiert sogar absolut.

Mit denselben N und M in Abhängigkeit von $\epsilon > 0$ gilt für alle $m > M \geq N$

$$\left| \sum_{k=1}^m a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\max\{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(m), m\}} |a_k| < \epsilon.$$

Also konvergiert $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert wie $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. **q.e.d.**

Satz 4.24 (Riemann). *Sei $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Reihe, die nicht absolut konvergiert, und $\alpha \leq \beta$ zwei reelle Zahlen. Dann gibt es eine Umordnung $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, die als Reihe beschränkt ist und für die α der Limes inferior der Reihe ist und β der Limes superior. Wenn $\alpha \neq \beta$ konvergiert die Reihe also nicht.*

Beweis*: Weil $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir betrachten im folgenden die beiden Teilfolgen aller nichtnegativen Elemente $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und aller negativen Elemente $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Weil $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht absolut konvergiert, und $(\sum 2b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(\sum a_n + |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, bzw. $(\sum 2c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(\sum a_n - |a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, konvergieren die beiden monotonen Reihen $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\sum c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht und sind auch nicht beschränkt.

Wir setzen die umgeordnete Folge $(a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ abwechselnd jeweils der Reihe nach aus den Folgen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zusammen. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder größer ist als β , dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus c_n fort, bis die Summe kleiner als α ist. Wenn die Summe aller bisherigen Folgenglieder kleiner als α ist, dann fahren wir solange mit Folgengliedern aus b_n fort, bis die Summe größer als β ist. Wenn $0 \in [\alpha, \beta]$ starten wir mit Folgengliedern aus b_n , bis die Summe größer als β ist. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Glieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deren Absolutbetrag nicht kleiner als ϵ ist. Deshalb gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass die Summen $\sum_{k=1}^n a_{\tau(k)}$ für alle $n \geq N$ in $(\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon)$ liegen. Es gibt unendlich viele Glieder von $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die kleiner als α sind und unendlich viele, die größer als β sind. Die umgeordnete Reihe $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ hat also als Limes inferior α und als Limes superior β . **q.e.d.**

Weil für jedes $\epsilon > 0$ und $x \in [\alpha, \beta]$ unendlich viele Glieder von $(\sum a_{\tau(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ liegen, ist die Menge der Häufungspunkte dieser Reihe gleich $[\alpha, \beta]$.

Definition 4.25. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann heißt $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die entsprechende Potenzreihe mit Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.*

Aus dem Wurzeltest folgt sofort

Satz 4.26 (Konvergenzradius von Potenzreihen). *Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Koeffizienten der Potenzreihe $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ wenn $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt ist und sonst $\alpha = \infty$, und sei $R = \frac{1}{\alpha}$ ($R = 0$ für $\alpha = \infty$ und $R = \infty$ für $\alpha = 0$).*

(i) *Für $|x| < R$ konvergiert $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ absolut.*

(ii) *Für $|x| > R$ divergiert $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.*

Wenn $\alpha < \infty$ definiert die Potenzreihe also folgende Funktion:

$$f: \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < R\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Beispiel 4.27. (i) $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}} = 0 \implies R = \infty$.

(ii) $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x^n\right)$ also $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{1} = 1 \implies R = 1$. Für $|x| < 1$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

(iii) $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n}\right)$ also $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = 1 \implies R = 1$.

Für $|x| < 1$ ist die Potenzreihe also konvergent, aber für $x = 1$ divergent und für $x = -1$ konvergent (alternierende Reihe von Leibniz).

(iv) $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n^2}\right)$ also $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1 \implies R = 1$.

Für $|x| \leq 1$ also konvergent und für $|x| > 1$ divergent.

Satz 4.28 (Eigenschaften von Potenzreihenfunktionen).

(i) Seien $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n)$ und $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} b_n x^n)$ Potenzreihen mit Konvergenzradius R_1 bzw. R_2 . Dann konvergieren für $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ die Summe $(\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (a_n + b_n) x^n)$ und das Cauchyprodukt $(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n)$ der beiden Potenzreihen und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right).$$

(ii) Für $r < R_1$ gibt es ein $M(r) \in (0, \infty)$, so dass $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq M(r)$ für $|x| \leq r$ gilt.

(iii) Für $r < R_1$ und für $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $|x| \leq r$ folgendes gilt:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n x^n\right| < \epsilon.$$

(iv) Für $r < R_1$ gibt es ein $L > 0$, so dass für x, y mit $|x|, |y| \leq r$ folgendes gilt:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n\right| \leq L|x - y|.$$

Beweis: (i) Folgt aus den Rechenregeln für Reihen und der Konvergenz des Produktes.

(ii) Für $|x| \leq r$ gilt $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = M(r) < \infty$.

(iii) Weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ absolut konvergiert gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^N |a_n| \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon$ gilt. Dann folgt für $|x| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

(iv) $(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$. Für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$ folgt also $|x^n - y^n| \leq |x - y| n r^{n-1}$. Weil aber gilt

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim} \left(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},$$

haben die Reihen $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\sum n \cdot a_n x^{n-1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ den gleichen Konvergenzradius. Also gilt für $|x| \leq r$ und $|y| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x^n - y^n| \leq |x - y| L \text{ mit } L = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot n r^{n-1}. \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Satz 4.29 (Identitätssatz für Potenzreihenfunktionen).

- (i) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, die nicht identisch verschwindet, dann hat die Potenzreihenfunktion für ein $0 < r < R$ in $\{x \in \mathbb{K} \mid 0 < |x| < r\}$ keine Nullstelle.
- (ii) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihenfunktion mit Konvergenzradius $R > 0$. Für alle x_0 mit $|x_0| < R$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} x_0^k$. Außerdem ist der Konvergenzradius der Potenzreihenfunktion $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ nicht kleiner als $R - |x_0|$ und für alle $|x| < R - |x_0|$ gilt auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + x_0)^n$.
- (iii) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei Potenzreihenfunktionen, deren Konvergenzradien größer sind als $r > 0$. Falls $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$ unendliche viele verschiedene Elemente enthält, an denen die beiden Potenzreihenfunktionen übereinstimmen, dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. sie stimmen als Potenzreihen überein.

Beweis: (i) Sei $N \in \mathbb{N}_0$ der kleinste Index, so dass $a_N \neq 0$. Wenn alle anderen Koeffizienten $(a_n)_{n > N}$ verschwinden, hat die Potenzreihe höchstens Nullstellen bei $x = 0$. Andernfalls gilt für ein $0 < r < R$ und alle $|x| \leq r$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_N x^N \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \leq |x|^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right).$$

Also gilt für alle Nullstellen x_m mit $|x_m| \leq r$ der Potenzreihenfunktionen

$$|a_N| \cdot |x_m|^N \leq |x_m|^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right).$$

Wenn $|x_m| \neq 0$ ist folgt daraus $0 < |a_N| \leq |x_m| (\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n)$. Also hat die Potenzreihenfunktion keine Nullstelle in

$$\left\{ x \in \mathbb{K} \mid 0 < |x| < \min \left\{ r, |a_N| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+N+1}| r^n \right)^{-1} \right\} \right\}.$$

(ii) Für $x_0 = 0$ trivial. Sei $0 < |x_0| = r < R$. Dann ist für alle $0 < s < R - r$ die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+s)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_n \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty$$

absolut summierbar. Dann gilt für alle $m = n - k \in \mathbb{N}_0$ und $K \in \mathbb{N}_0$:

$$s^m \sum_{k=0}^K |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} r^k s^{n-k} < \infty.$$

Für alle $m = n - k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert also $b_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k$ absolut. Und es gilt

$$\sum_{m=0}^M s^m \sum_{k=0}^{\infty} |a_{m+k}| \binom{m+k}{k} r^k \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_n| \binom{n}{k} r^{n-k} s^k < \infty$$

für alle $M \in \mathbb{N}_0$. Also ist auch $\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| s^m \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (r+s)^n < \infty$.

Also ist $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ für alle $|x| < R - r$ konvergent, und der Konvergenzradius nicht kleiner als $R - r = R - |x_0|$. Für $|x| < R - |x_0|$ und alle $M, K \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\left| \sum_{m=0}^M x^m \sum_{k=0}^K a_{m+k} \binom{m+k}{k} x_0^k - \sum_{n=0}^{M+K} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=\min\{M+1, K+1\}}^{M+K} |a_n| (|x| + |x_0|)^n.$$

Also folgt im Grenzwert $K \rightarrow \infty$

$$\left| \sum_{m=0}^M b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n \right| \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n| (|x| + |x_0|)^n < \infty.$$

und im Grenzwert $M \rightarrow \infty$ auch $\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+x_0)^n = 0$.

(iii) Sei $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Nullstellen der Potenzreihenfunktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$ in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x| \leq r\}$. Dann hat die Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x_0 mit $|x_0| \leq r$ und für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Glieder in $\{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < \epsilon\}$. Sei R das Minimum der Konvergenzradien von $(\sum a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

und $(\sum b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Dann hat aufgrund der Voraussetzung und wegen (ii) die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(y+x_0)^n$, als Potenzreihe in y mindestens den Konvergenzradius $R-r > 0$, und für alle $0 < \epsilon \leq R-r$ unendlich viele Nullstellen auf $\{y \in \mathbb{C} \mid |y| < \epsilon\}$. Also verschwindet wegen (i) diese Potenzreihe in y identisch. Dann stimmen wegen (ii) die beiden Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ auf dem Ball $\{x \in \mathbb{K} \mid |x-x_0| < R-r\}$ überein. Also gibt es eine Folge $(\tilde{x}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Nullstellen von $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)x^n$, die gegen ein \tilde{x}_0 mit $|\tilde{x}_0| = \max\{r - (R-r), 0\} < r$ konvergiert. Dabei ist $R - |\tilde{x}_0| > R-r$. Sei $\frac{R}{R-r} < N \in \mathbb{N}$. Indem wir die beiden Potenzreihe immer wieder an einer Stelle mit minimalem Radius in dem Bereich entwickeln, in dem wir schon die Gleichheit beider Potenzreihen gezeigt haben, erhalten wir nach höchstens N Schritten, dass beide Potenzreihen auf einer Nullfolge übereinstimmen. Wegen (i) sind dann die beiden Potenzreihen $(\sum a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\sum b_n x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ identisch. **q.e.d.**

4.4 Sinus und Cosinus

Definition 4.30. Für alle $x \in \mathbb{K}$ sei

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Also gilt für reelle x $\cos(x) = \Re(\exp(ix))$ $\sin(x) = \Im(\exp(ix))$
 und für alle $x \in \mathbb{K}$ die **Eulersche Formel**: $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$.
 Außerdem gilt für alle $x \in \mathbb{K}$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \frac{\exp(2ix) + 2 + \exp(-2ix)}{4} - \frac{\exp(2ix) - 2 + \exp(-2ix)}{4} = 1,$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Satz 4.31 (Additionstheorem). Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Beweis: $\exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)$.

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)). \end{aligned}$$

Ersetzen wir x und y durch $-x$ und $-y$ und benutzen $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$, dann erhalten wir

$$\cos(x+y) - i \sin(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) - i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).$$

Die Summe und die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}\quad \text{q.e.d.}$$

Durch Einsetzen von (x, y) und $(x, -y)$ erhalten wir für alle $x, y \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2\cos(x)\cos(y) \\ \cos(x-y) - \cos(x+y) &= 2\sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2\sin(x)\cos(y)\end{aligned}$$

Satz 4.32 (Potenzreihen von Sinus und Cosinus).

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Beweis: Weil $i^2 = -1$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $i^{2k} = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i(-1)^k$. Also gilt

$$\begin{aligned}(ix)^{2k} + (-ix)^{2k} &= 2(-1)^k x^{2k}, & (ix)^{2k+1} + (-ix)^{2k+1} &= 0, \\ (ix)^{2k} - (-ix)^{2k} &= 0, & (ix)^{2k+1} - (-ix)^{2k+1} &= 2i(-1)^k x^{2k+1}\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{K}$ und damit auch

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{2 \cdot n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \\ \sin(x) &= \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n - (-ix)^n}{2i \cdot n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\end{aligned}\quad \text{q.e.d.}$$