Kapitel 3

Zahlenfolgen

3.1 Konvergenz

Im folgenden werden wir des öfteren Aussagen vorstellen, die sowohl für die reellen Zahlen als auch für die komplexen Zahlen gelten. Wir benutzen dann das Symbol $\mathbb{K}$ um entweder die reellen oder die komplexen Zahlen zusammen mit den entsprechenden Abbildungen und Operationen zu bezeichnen. Die Elemente von $\mathbb{K}$ wollen wir dann einfach Zahlen nennen. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{K}$, $n \mapsto a_n$. Wir bezeichnen sie mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir interessieren uns vorwiegend für die Grenzwerte solcher Zahlenfolgen.

Definition 3.1. *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ gibt und für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt. Die Zahl a heißt dann Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

Wir schreiben dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $\lim a_n = a$ oder auch $a_n \to a$ für $n \to \infty$.

Beispiel 3.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ *(Folgen, die gegen 0 konvergieren heißen Nullfolgen).*

Beweis: Nach dem Satz von Archimedes-Eudoxos gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \epsilon$. Dann gilt wegen Satz 2.14 (vi) für alle $n \geq N$ auch $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$. **q.e.d.**

Satz 3.3. **(i)** *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

(ii) *Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn die entsprechenden Folgen der Realteile und Imaginärteile konvergieren.*

(iii) *Für jede konvergente Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt.*

Beweis: **(i)** Seien a und b zwei Grenzwerte einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für ein $\epsilon > 0$ gilt dann $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ und $|a_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Dann folgt

$$0 \leq |a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \text{ für alle } n \geq \max\{N, M\}.$$

Dann gilt auch $0 \leq |a-b| \leq \inf(0,\infty) = 0$. Also ist $|a-b| = 0$ und damit auch $a = b$.
(ii) Die Realteile und Imaginärteile einer komplexen Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bilden zwei reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = x_n + \imath y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $z = x + \imath y$ die Zerlegung einer komplexen Zahl in Realteil und Imaginärteil. Wegen Satz 2.59 (vi)

$$\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq |z_n - z|$$

konvergieren die Real- bzw. Imaginärteile einer konvergenten komplexen Folge gegen den Realteil bzw. Imaginärteil des Grenzwertes. Konvergieren umgekehrt die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x bzw. y, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$ so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt, und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$|x_n + \imath y_n - (x + \imath y)| \leq |x_n - x| + |\imath(y_n - y)| = |x_n - x| + |\imath| \cdot |y_n - y| < \epsilon.$$

Also konvergiert eine komplexe Folge mit ihren Realteilen und Imaginärteilen.
(iii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$ gilt und damit auch $|a_n| \leq |a_n - a + a| < 1 + |a|$. Daraus folgt $\quad |a_n| \leq \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|\} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$. **q.e.d.**

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt divergent, wenn sie nicht konvergiert, wenn es also kein $a \in \mathbb{K}$ gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Wenn es für eine reelle Folge für jedes $b \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt $a_n > b$ bzw. $a_n < b$ dann schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ Weil in beiden Fällen die Folgen nicht beschränkt sind, können sie wegen dem vorangehenden Satz nicht konvergieren. Es gilt offenbar $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} -n = -\infty$.

Satz 3.4. **(i)** *Sei* $|x| < 1$ *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

(ii) *Sei* $|x| > 1$ *dann ist* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent.*

(iii) *Sei* $x = 1$ *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$

(iv) *Sei* $x \in (1,\infty)$ *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.

(v) *Sei* $|x| = 1$ *und* $x \neq 1$ *dann ist* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent.*

Beweis: **(i)** Für $x = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. Sei also $0 < |x| < 1$. Dann ist $1 < \frac{1}{|x|} = 1 + y$ mit $y = \frac{1-|x|}{|x|}$. Aus der Bernoulli Ungleichung folgt $\frac{1}{|x|^n} = (1+y)^n \geq 1 + ny > ny = n\frac{1-|x|}{|x|}$ und $|x|^n < \frac{1}{n}\frac{|x|}{1-|x|}$. Aus dem Satz von Archimedes-Eudoxos folgt dann, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\frac{1}{N} < \epsilon \cdot \frac{1-|x|}{|x|}$. Daraus folgt für alle $n \geq N$

$$|x^n - 0| = |x|^n < \frac{1}{n}\frac{|x|}{1-|x|} \leq \frac{1}{N}\frac{|x|}{1-|x|} < \epsilon.$$

(iii) Wegen $1^n = 1$ ist $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.
(iv) Sei $x > 1$. Dann ist $y = x-1 > 0$. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{b}{x-1}$. Dann folgt für alle $n \geq N$ aufgrund der Bernoulli Ungleichung

$$x^n = (1+y)^n \geq 1 + ny > ny = n(x-1) \geq N(x-1) > b.$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$.
(ii) Für $|x| > 1$ gilt wegen (iv) $\lim_{n\to\infty} |x^n| = \infty$. Also ist $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt.
(v) Für alle $y \in \mathbb{K}$ und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$|x^n - y| + |y - x^{n+1}| \geq |x^n - y + y - x^{n+1}| = |(1-x)x^n| = |1-x| \cdot |x|^n.$$

Für $|x| = 1$ gilt also $\qquad \max\{|x^n - y|, |x^{n+1} - y|\} \geq \dfrac{|1-x|}{2}$.
Also kann es für $x \neq 1$ keinen Grenzwert geben. **q.e.d.**

Satz 3.5 (Rechenregeln)**.** *Für konvergente Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$

(iv) *Wenn $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, dann gilt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} x_n|$.

(vi) *Wenn zwei reelle konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$ erfüllen, dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

(vii) *Wenn zwei reelle konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq y_n$ erfüllen und den gleichen Grenzwert haben, dann gilt für jede reelle Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die $x_n \leq z_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.*

Beweis: Seien $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. **(i)** Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$ gilt. Dann gilt $|x_n + y_n - (x+y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ für alle $n \geq \max\{N, M\}$. Also konvergiert $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x + y$.
(ii) Für $\lambda = 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Sei also $\lambda \neq 0$ und damit $0 < |\lambda|$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ für alle $n \geq N$ gilt. Daraus folgt:

$$|\lambda x_n - \lambda x| = |\lambda| \cdot |x_n - x| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

(iii) Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $\lambda > 0$ mit $|x_n| \leq \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gibt es für alle $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2|y|+1}$ für $n \geq N$ gilt und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2\lambda}$ für alle $n \geq M$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon|y|}{2|y|+1} < \epsilon.$$

(iv) Aufgrund der Voraussetzungen gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Aus $|x| = |x - x_n + x_n| \leq |x - x_n| + |x_n|$ folgt dann

$$|x_n| \geq |x| - |x - x_n| > \frac{|x|}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|x|} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon \cdot |x|^2}{2}$ für alle $n \geq M$ gilt. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$ auch

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x - x_n}{x_n x}\right| = \frac{|x - x_n|}{|x_n| \cdot |x|} < \frac{\epsilon \cdot |x|^2}{2} \frac{2}{|x|} \frac{1}{|x|} = \epsilon$$

(v) folgt aus der Ungleichung $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$.
(vi) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen N und M, so dass $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt und $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq M$. Dann gilt für alle $n \geq \max\{N, M\}$

$$x - y \leq (x - x_n) + (y_n - y) + (x_n - y_n) < \epsilon$$

Also ist $x - y \leq \inf(0, \infty) = 0$. Daraus folgt $x \leq y$.
(vii) Für alle $\epsilon > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt und $|y_n - x| < \epsilon$ für alle $n \geq M$. Für alle $n \geq \max\{N, M\}$ gilt dann

$$-\epsilon < x_n - x \leq z_n - x \leq y_n - x < \epsilon$$

Daraus folgt $|z_n - x| < \epsilon$. **q.e.d.**

Offenbar gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) = (1 + x + \ldots + x^n) - (x + x^2 + \ldots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1}$$

Also gilt $$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{für } x \neq 1 \text{ und } n \in \mathbb{N}_0.$$

Aus Satz 3.4 folgt, dass die Folge $y_n = 1 + x + \ldots + x^n$ für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$ konvergiert.

Satz 3.6. $$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} x^m = \frac{1}{1 - x} \quad \textit{für } |x| < 1.$$ **q.e.d.**

3.2 Konvergenzprinzipien

Wir stellen 3 Methoden vor, um zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert oder nicht.

Definition 3.7 (Monotonie)**.** *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt:*

monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

streng monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

streng monoton fallend*, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Satz 3.8 (Monotonieprinzip)**. (i)** *Eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *Für eine monoton wachsende (fallende) unbeschränkte reelle Folge gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Beweis: (i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) beschränkte reelle Folge. Dann existiert $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für alle $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} - \epsilon < a_N \leq a_m \leq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad & \text{für alle } m \geq N \quad \text{bzw.} \\ \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq a_m \leq a_N < \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \epsilon \qquad & \text{für alle } m \geq N. \end{aligned}$$

Daraus folgt $|a_m - \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}| < \epsilon$ bzw. $|a_m - \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}| < \epsilon$.
(ii) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende (fallende) unbeschränkte reelle Folge. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $a_m \geq a_N > b$ bzw. $a_m \leq a_N < b$. für alle $m \geq N$.**q.e.d.**

Beispiel 3.9 (Existenz und Konstruktion der k–ten Wurzel)**.** *Für alle $a > 0$ und alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ definieren wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv durch*

$$a_0 = 1 + \frac{a-1}{k} \qquad\qquad a_{n+1} = a_n\left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right) \ \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $a = 1$ ist dann $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $a \neq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n < a_0, \qquad\qquad a_n < a_{n-1} \ \textit{und} \qquad\qquad a < a_n^k.$$

Beweis durch vollständige Induktion in n:

(i) Für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-1}{k} \neq 0$. Wegen der Bernoulli Ungleichung gilt $a_0^k = \left(1 + \frac{a-1}{k}\right)^k > 1 + a - 1 = a$. Es folgt $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_0^k}{ka_0^k} < 0$. Also gilt $0 < a_1 < a_0$ und mit der Bernoulli Ungleichung $a_1^k = a_0^k \left(1 + \dfrac{a - a_0^k}{ka_0^k}\right)^k > a_0^k \left(1 + k\dfrac{a - a_0^k}{ka_0^k}\right) = a$.
(ii) Wir nehmen an es gilt $0 < a_n < a_0$, $a_n < a_{n-1}$ und $a < a_n^k$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $-1 < -\frac{1}{k} < \frac{a-a_n^k}{k \cdot a_n^k} < 0$. Daraus folgt $0 < a_{n+1} < a_n < a_0$ und wegen der Bernoulli Ungleichung: $a_{n+1}^k = a_n^k \left(1 + \dfrac{a - a_n^k}{ka_n^k}\right)^k > a_n^k \left(1 + k\dfrac{a - a_n^k}{ka_n^k}\right) = a$. **q.e.d.**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt. Wegen dem Monotonieprinzip konvergiert sie gegen $b \geq 0$. Wir multiplizieren die Rekursionsgleichung mit ka_n^{k-1}:

$$a_{n+1} \cdot ka_n^{k-1} = ka_n^k + a - a_n^k.$$

Bilden wir links und rechts den Grenzwert $n \to \infty$ so erhalten wir mit Satz 3.5

$$kb^k = (k-1)b^k + a \text{ oder auch } b^k = a.$$

Also existiert eine positive Zahl b mit $b^k = a$. Diese Folge konvergiert sehr schnell. Außerdem sind für rationale a alle Folgenglieder rational.

Satz 3.10. **(i)** *Für jede positive Zahl $a > 0$ und jede rationale Zahl r gibt es genau eine positive Zahl a^r. Für r=0 setzen wir $a^0 = 1$.*

(ii) *Für jede positive rationale Zahl $r > 0$ und $0 < a < b$ gilt auch $0 < a^r < b^r$.*

(iii) *Für jede negative rationale Zahl $r < 0$ und $0 < a < b$ gilt auch $0 < b^r < a^r$.*

Beweis: **(i)** Für $r = \frac{p}{q}$ definieren wir $a^r = \sqrt[q]{a^p}$. Offenbar ist a^r eine positive Lösung der Gleichungen $(a^r)^{qn} = (a^p)^n = a^{pn}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass für $a, b \in (0, \infty)$ und für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a < b$ äquivalent ist zu $a^n < b^n$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Also folgt aus $0 < a < b$ auch $a^n < b^n$ und aus $0 < b \leq a$ auch $a^n \leq b^n$. Also ist für $a > 0$ und $b > 0$ die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu der Ungleichung $a^n < b^n$. Also gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r = \frac{p}{q} > 0$ genau eine positive Lösung a^r der Gleichung $(a^r)^{qn} = a^{pn}$. Für $r < 0$ ist $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$ die entsprechende positive Zahl.
(ii) Sei $r = \frac{p}{q} > 0$. Dann ist für $a, b \in (0, \infty)$ die Ungleichung $a < b$ äquivalent zu $a^p < b^p$ und das wiederum äquivalent zu $a^{\frac{p}{q}} < b^{\frac{p}{q}}$.
(iii) Sei $r = \frac{-p}{q} < 0$. Dann folgt (iii) aus (ii) wegen Satz 2.14 (vi). **q.e.d.**

Definition 3.11 (Teilfolge)**.** *Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von der Form $b_m = a_{n_m}$, wobei $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen ist.*

Z.B. hat die divergente Folge $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen $b_m = a_{2m} = 1$ und $c_m = a_{2m+1} = -1$.

Satz 3.12 (monotone Teilfolgen)**.** *Jede reelle Folge enthält eine monotone Teilfolge.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und A die Menge $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq a_m \forall m > n\}$. Wenn A eine unendliche Menge ist, dann sei $n_1 < n_2 < \ldots$ eine Abzählung der Elemente von A. Die Teilfolge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}} = (a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ ist dann monoton fallend.

Wenn A eine endliche Menge ist besitzt sie ein Maximum N. Dann gibt es also zu jedem $n > N$ ein $m > n$, so dass $a_m > a_n$ ist. Also definieren wir induktiv eine Teilfolge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so dass $b_1 = a_{N+1}$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ $b_{m+1} > b_m$ gilt. Diese Folge ist streng monoton steigend. Also besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder eine monoton fallende oder eine streng monoton steigende Teilfolge. Umgekehrt gilt auch, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entweder eine monoton steigende oder eine streng monoton fallende Teilfolge besitzt. **q.e.d.**

Satz 3.13 (Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß)**.** *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wegen dem vorangehenden Satz besitzt jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wenn die ursprüngliche Folge beschränkt ist, ist auch die Teilfolge beschränkt. Diese konvergiert dann wegen dem Monotonieprinzip. **q.e.d.**

Korollar 3.14. *Jede beschränkte komplexe Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis: Wegen $\max\{|x|, |y|\} \leq |x + \imath y|$ sind die reellen Folgen der Realteile und Imaginärteile einer komplexen beschränkten Folge beschränkt. Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß besitzt die Folge der Realteile eine konvergente Teilfolge, und dann auch die entsprechende Teilfolge der Imaginärteile. Wegen Satz 3.3 (ii) konvergiert die der zweiten Teilfolge entsprechende komplexe Teilfolge. **q.e.d.**

Definition 3.15 (Cauchyfolge)**.** *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt.*

Satz 3.16 (Kriterium von Cauchy)**.** *Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $m \geq N$ die Ungleichung $|a_m - \lim_{n\to\infty} a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen. Also gilt auch

$$|a_m - a_l| \leq |a_m - \lim_{n\to\infty} a_n| + |\lim_{n\to\infty} a_n - a_l| < \epsilon \quad \text{für alle } m, l \geq N.$$

Sei umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq N$ gilt $|a_m - a_N| < 1$, und damit auch $|a_m| \leq |a_N| + |a_m - a_N| < |a_N| + 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann aber $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ Deshalb ist die Folge a_n beschränkt und besitzt wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen $N, M \in \mathbb{N}$, so dass alle $n, m \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ erfüllen und alle $n \geq M$ die Ungleichung $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, folgt $|a_n - a| \leq |a_n - b_n| + |b_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq \max\{N, M\}$. **q.e.d.**

Satz 3.17. *Für einen angeordneten archimedischen Körper ist folgendes äquivalent:*

Vollständigkeitsaxiom A5.

(i) aus dem Monotonieprinzip.

Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß.

Jede Cauchyfolge konvergiert.

Intervallschachtelungsprinzip.

Beweis*: Wegen der Beweise des Monotonieprinzips, des Auswahlprinzips von Bolzano–Weierstraß und des Kriteriums von Cauchy und wegen Satz 2.51 genügt es zu zeigen, dass aus dem Kriterium von Cauchy das Vollständigkeitsaxiom **A5** folgt.

Sei M eine nicht leere nach oben beschränkte Menge. Sei $a_1 \in M$ und $b_1 > a_1$ eine obere Schranke von M. Wir konstruieren wie im Beweis von Satz 2.51 eine Folge $a_1 \leq a_2 \ldots$ in M und eine Folge $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ von oberen Schranken von M mit

$$0 \leq \max\{b_{n+1} - b_{n+m}, a_{n+m} - a_{n+1}\} \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-n}(b_1 - a_1) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Dann sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen und konvergieren gegen den gleichen Grenzwert s. Für alle $x \in M$ gilt $x \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Satz 3.5 (vi) folgt $x \leq \lim_{n\to\infty} b_n = s$. Also ist s eine obere Schranke von M. Für alle $x < s = \lim_{n\to\infty} a_n$ gibt es ein $a_n > x$. Deshalb ist s das Minimum der oberen Schranken von M. **q.e.d.**

Insbesondere sind die reelllen Zahlen auch als der angeordnete archimedische Körper charakterisiert, in dem jede Cauchyfolge konvergiert. Wir werden die reellen Zahlen später auch als Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen von rationalen Zahlen auffassen, wobei zwei Cauchyfolgen äquivalent heißen, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist.

3.3 Häufungspunkte

Definition 3.18 (Häufungspunkt)**.** *Die Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen heißen Häufungspunkte. Bei reellen Folgen sind in $\bar{\mathbb{R}}$ zusätzlich $+\infty$ bzw. $-\infty$ Häufungspunkte, wenn es Teilfolgen mit diesen Grenzwerten in $\bar{\mathbb{R}}$ gibt.*

Satz 3.19 (Limes superior und Limes inferior)**.** *Ist die Menge der reellen Häufungspunkte einer reellen Folge nicht leer und nach oben (unten) in $\mathbb{R}$ beschränkt, so besitzt sie ein Maximum (Minimum) in $\mathbb{R}$.*

Beweis: Sei die Menge der Häufungspunkte der reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Sei $a \in \mathbb{R}$ das Supremum der Häufungspunkte, und b_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Häufungspunkt $b_m \in (a - \frac{1}{2m}, a]$. Wir definieren induktiv eine Teilfolge $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|c_m - b_m| < \frac{1}{2m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $|c_m - a| \leq |c_m - b_m| + |b_m - a| < \frac{1}{m}$. Also ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit das Maximum der Häufungspunkte. Der Beweis für das Minimum ist analog. **q.e.d.**

Definition 3.20. *Für eine nach oben (unten) beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt das Supremum (bzw. Infimum) der Häufungspunkte Limes superior bzw. inferior. Wir bezeichnen es mit $\overline{\lim} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ bzw. $\underline{\lim} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben (unten) beschränkt ist, dann sei $\overline{\lim} a_n = \infty$ bzw. $\underline{\lim} a_n = -\infty$.*

Satz 3.21. **(i)** *$\bar{a}$ ist genau dann der Limes superior einer nach oben beschränkten reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Elemente der Folge $a_n > \bar{a} - \epsilon$ erfüllen, aber höchstens endlich viele $a_n > \bar{a} + \epsilon$.*

(ii) *$\underline{a}$ ist genau dann der Limes inferior einer nach unten beschränkten reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Elemente $a_n < \underline{a} + \epsilon$ erfüllen, aber höchstens endliche viele $a_n < \underline{a} - \epsilon$.*

Beweis: Wir beweisen wieder nur (i), weil (ii) analog zu beweisen ist. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben beschränkte reelle Folge. Wegen dem Auswahlprinzip von Bolzano–Weierstraß ist jede untere Schranke einer Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine untere Schranke von mindestens einem Häufungspunkt. Aus der Charakterisierung der Zahl $\bar{a}$ in (i) folgt also, dass $\bar{a}-2\epsilon$ keine obere Schranke, aber $\bar{a}+\epsilon$ eine obere Schranke der Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Umgekehrt folgt sie daraus, dass $\bar{a} - \epsilon$ keine obere Schranke, aber $\bar{a}$ eine obere Schranke der Häufungspunkte ist. Damit ist ihre Gütigkeit für alle $\epsilon > 0$ äquivalent dazu, dass $\bar{a}$ das Supremum der Häufungspunkte ist. **q.e.d.**

Korollar 3.22. *Eine reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist und wenn $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ gilt, sie also nur einen Häufungspunkt hat.*

Weil $\overline{\lim} a_n$ und $\underline{\lim} a_n$ das Maximum und das Minimum der Häufungspunkte sind, ist $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$ äquivalent zu der Bedingung, dass es nur einen Häufungspunkt gibt.
Beweis: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$ gilt, dann folgt aus dem vorangehenden Satz, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt, so dass $\underline{\lim} a_n - \epsilon \leq a_n \leq \overline{\lim} a_n + \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Also gilt $|a_n - a| \leq \epsilon$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.
Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Also besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur einen Häufungspunkt und es gilt $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = a$. **q.e.d.**

Korollar 3.23. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten (bzw. oben) beschränkte reelle Folgen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq b_n$ erfüllen. Dann gilt $\underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$ bzw. $\overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n$.*

Beweis: Sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $\underline{\lim} b_n$ (bzw. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die gegen $\overline{\lim} a_n$) konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$), die für alle $n\in\mathbb{N}$ auch $c_n \le d_n$ erfüllt. Diese Teilfolge ist beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$) konvergiert. Dann ist aber $\lim_{n\to\infty} c_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} d_n$ ein Häfungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Also gilt $\underline{\lim} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty} d_n = \underline{\lim} b_n$

(bzw. $\overline{\lim} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \le \lim\limits_{n\to\infty} d_n \le \overline{\lim} b_n$). **q.e.d.**

3.4 Beispiele

(i) Für alle $x\in\mathbb{C}$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Beweis: Wegen dem Satz von Archimedes–Endoxes gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|x| < N$. Dann gilt für alle $n \ge N$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\frac{|x|^{n+1-N}}{N\cdots n} \le \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-N}\cdot\frac{|x|}{n} < \frac{|x|^N}{(N-1)!}\cdot\frac{1}{n}$$

Weil aber $\frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist, konvergiert dann $\left|\frac{x^n}{n!}\right|$ auch gegen Null. **q.e.d.**

(ii) Für alle positiven rationalen Zahlen $r > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

Beweis: Nach dem Satz von Archimedes–Eudoxos, gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $N\in\mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$. Für alle $n \ge N$ folgt $\frac{1}{n^r} \le \frac{1}{N^r} < \epsilon$. Also konvergiert $\frac{1}{n^r}$ nach Null. **q.e.d.**

(iii) Für alle $x\in(0,\infty)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

Beweis: Sei zunächst $x \ge 1$. Sei also $y_n = \sqrt[n]{x} - 1 \ge 0$. Wegen der Bernoulli Ungleichung gilt dann $x = (1+y_n)^n \ge 1 + ny_n$. Daraus folgt $0 \le y_n \le \frac{x-1}{n}$. Dann konvergiert y_n aber gegen Null. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$.

Sei jetzt $0 < x < 1$. Dann ist $\frac{1}{x} > 1$. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{x}}} = 1$. **q.e.d.**

Binomische Formel 3.24. *Für alle $n\in\mathbb{N}$ und alle Zahlen $x,y\in\mathbb{K}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},\ \textit{wobei}\ \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\ \textit{und}\ 0! = 1 = \binom{n}{0}.$$

Beweis: durch vollständige Induktion:
(i) Offenbar ist $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, und die binomische Formel ist für $n = 1$ richtig.
(ii) Wenn die binomische Formel für $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann folgt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{k!} + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\right)x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{(n+1)n\cdots(n-k+2)}{k!}\right)x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Also gilt sie auch für $n+1$. **q.e.d.**

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis: Sei $y_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$. Wegen der binomischen Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1+y_n)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y_n^k$$

Für alle $n \geq 2$ folgt $\quad n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}y_n^2 \iff y_n^2 \leq \frac{2}{n} \iff y_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$.
Wegen (ii) ist dann y_n eine Nullfolge. **q.e.d.**

(v) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Beweis: Wegen (i) gibt es für alle $x \in (0,\infty)$ ein N, so dass für alle $n \geq N$ gilt $\frac{x^n}{n!} < 1$.
Dann gilt auch $\frac{x}{\sqrt[n]{n!}} < 1 \iff x < \sqrt[n]{n!}$. Also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$. **q.e.d.**

Satz 3.25. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle positive Folge, dann gilt*

$$\underline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \qquad\qquad \overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Wenn die Folge $\sqrt[n]{a_n}$ also einen reellen Häufungspunkt hat, dann hat auch die Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ einen reellen Häufungspunkt. Und wenn gilt $\overline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < \infty$ dann auch $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} < \infty$.

Beweis: Wenn $\underline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 0$ ist, ist die erste Aussage richtig. Für $\underline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 0$ gibt es wegen Satz 3.21 (ii) ein $a > 0$, und für alle $0 < \epsilon < a$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle $n \geq N$ auch $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq a - \epsilon$ erfüllen. Dann gilt für alle $n > N$

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq (a-\epsilon)^{n-N} \Longrightarrow a_n \geq a_N \frac{(a-\epsilon)^n}{(a-\epsilon)^N} \Longrightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_N}{(a-\epsilon)^N}} \cdot (a-\epsilon).$$

Wegen (iii) und Korollar 3.23 gilt dann $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq (a-\epsilon)$. Weil dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt auch $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq a$. Also ist $\underline{\lim}\sqrt[n]{a_n} \geq a$ nicht kleiner als der kleinste Häufungspunkt von $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Und für $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ gilt auch $\lim \sqrt[n]{a_n} = \infty$.

Für die Folge $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ gilt entsprechend $\underline{\lim}\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \underline{\lim}\sqrt[n]{a_n^{-1}} = \underline{\lim}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^{-1}$. Wegen Satz 2.14 (vi) und Satz 3.5 (iv) ist für eine positive Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\underline{\lim} b_n^{-1} = \left(\overline{\lim} b_n\right)^{-1}$ (mit $\frac{1}{\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = \infty$). Also folgt die zweite Ungleichung aus Satz 2.14 (vi). **q.e.d.**

(vi) $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und durch 3 beschränkt: Für $n > 2$ gilt

$$\frac{5}{2} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 2 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Also konvergiert diese Folge. Der Grenzwert heißt Eulersche Zahl $e \in (\frac{5}{2}, 3]$.

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Beweis: Wegen der binomischen Formel gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq e.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}.$

Also gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ $\qquad \underline{\lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum\limits_{k=0}^{m} \lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.$

Wegen $\sup\{\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \mid m \in \mathbb{N}\} = e$ folgt $e \leq \underline{\lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$. **q.e.d.**

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die positive Folge $\frac{n^n}{n!}$. Dann gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Wegen (vii) folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$ Dann folgt aus Satz 3.25

$$e = \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \overline{\lim}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = e.$$

Daraus folgt $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$ **q.e.d.**