Kapitel 2

Reelle Zahlen

2.1 Axiome von angeordneten Körpern

Zunächst charakterisieren wir angeordnete Körper $\mathbf{K}$ durch folgende Axiome:

A1. Axiome der Addition
A2. Axiome der Multiplikation
A3. Distributivgesetz
A4. Ordnungsaxiome

Es gibt mehrere angeordnete Körper. Der wichtigste ist der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Er wird später als der eindeutige angeordnete Körper charkterisiert, der zusätzlich das **A5.** Vollständigkeitsaxiom erfüllt.

A1. Axiome der Addition 2.1. *Es gibt eine Operation*
$+: \quad \mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}, \quad (x, y) \mapsto x + y$ *mit*

(i) *Kommutativgesetz:* $x + y = y + x$ *für alle* $x, y \in \mathbf{K}$.

(ii) *Assoziativgesetz:* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *für alle* $x, y, z \in \mathbf{K}$.

(iii) *Existenz der Null: es gibt eine Zahl* $0 \in \mathbf{K}$ *mit* $x + 0 = x$ *für alle* $x \in \mathbf{K}$

(iv) *Existenz des Negativen: zu jedem* $x \in \mathbf{K}$ *gibt es ein* $-x \in \mathbf{K}$ *mit* $x + (-x) = 0$.

A2. Axiome der Multiplikation 2.2. *Es gibt eine Operation*
$\cdot: \quad \mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$ *mit*

(i) *Kommutativgesetz:* $x \cdot y = y \cdot x$ *für alle* $x, y \in \mathbf{K}$.

(ii) *Assoziativgesetz:* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *für alle* $x, y, z \in \mathbf{K}$.

(iii) *Existenz der Eins: es gibt eine Zahl* $1 \in \mathbf{K}, 1 \neq 0$ *mit* $x \cdot 1 = x$ *für alle* $x \in \mathbf{K}$

(iv) *Existenz des Inversen: zu jedem* $x \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$ *gibt es ein* $x^{-1} \in \mathbf{K}$ *mit* $x \cdot x^{-1} = 1$.

A3. Distributivgesetz 2.3.

$$x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ für alle } x, y, z \in \mathbf{K}.$$

Definition 2.4. *Allgemein heißt eine Menge* $\mathbf{K}$*, die die Axiome* **A1-A3** *erfüllt Körper. Für Körper gelten daher auch alle Folgerungen aus* **A1-A3**. *Es gibt viele Körper.*

Beispiel 2.5. *Der kleinste Körper besteht aus zwei Elementen* $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$. *Die Operationen* $+$ *und* $\cdot$ *sind dann definiert durch:*

$$\begin{array}{llll} 0+0=0 & 0+1=1 & 0 \cdot 0 = 0 & 0 \cdot 1 = 0 \\ 1+0=1 & 1+1=0 & 1 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Zeige dass diese Definitionen von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{Z}_2$ die Axiome **A1-A3** erfüllen und umgekehrt durch **A1-A3** eindeutig bestimmt sind. In einem angeordneten Körper $\mathbf{K}$ soll aber $1+1>0$, also $1+1 \neq 0$ gelten, so dass wir noch weitere Axiome benötigen um angeordnete Körper zu charakterisieren.

Wir benützen folgende Abkürzungen:

$$\begin{array}{llll} x-y = x+(-y) & xy = x \cdot y & -xy = -(x \cdot y) & \forall x, y \in \mathbf{K} \\ \dfrac{1}{x} = x^{-1} & \dfrac{y}{x} = y \cdot x^{-1} & & \forall x \in \mathbf{K} \setminus \{0\}, y \in \mathbf{K} \\ x+y+z = x+(y+z) & xyz = x \cdot (y \cdot z) & xy+z = (x \cdot y)+z & \forall x, y, z \in \mathbf{K} \end{array}$$

Satz 2.6 (Folgerungen aus **A1**)**.**

(i) *Falls* $x+y = x+z$*, dann* $y = z$

(ii) *Falls* $x+y = x$*, dann* $y = 0$

(iii) *Falls* $x+y = 0$*, dann* $y = -x$

(iv) $-(-x) = x$

Bemerkung 2.7. *(i) heißt Kürzungsregel.*
(ii) zeigt, dass die Null eindeutig durch die Eigenschaft $x+0 = x$ *bestimmt ist.*
(iii) zeigt, dass das Negative $(-x)$ *eindeutig durch* $x+(-x) = 0$ *bestimmt ist.*

Beweis: **(i)** Sei $x + y = x + z$, dann folgern wir

$$\begin{aligned} y = y + 0 \quad &= 0 + y &&= (x - x) + y \\ = (-x + x) + y \quad &= -x + (x + y) &&= -x + (x + z) &&= (-x + x) + z \\ = (x - x) + z \quad &= 0 + z &&= z + 0 &&= z. \end{aligned}$$

(ii) Sei $x + y = x$, dann gilt $x + y = x + 0$. Also folgt aus (i) $y = 0$.
(iii) Sei $x + y = 0$, dann gilt $x + y = x + (-x)$. Also folgt aus (i) $y = -x$.
(iv) $-x + x = x + (-x) = 0$. Also folgt aus (iii) $x = -(-x)$. **q.e.d.**

Satz 2.8 (Folgerungen aus **A2**).

(i) *Falls $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann $y = z$*

(ii) *Falls $x \neq 0$ und $xy = x$, dann $y = 1$*

(iii) *Falls $x \neq 0$ und $x \cdot y = 1$, dann $y = x^{-1}$*

(iv) *Falls $x \neq 0$ und $x^{-1} \neq 0$, dann $(x^{-1})^{-1} = x$*

Bemerkung 2.9. *Die Folgerungen sind analog zu denen aus* **A1**. *Wieder heißt (i) Kürzungsregel, (ii) impliziert wieder die Eindeutigkeit der Eins und (iii) die Eindeutigkeit des Inversen.*

Beweis: **(i)** Sei $x \neq 0$ und $xy = xz$, dann folgern wir

$$y = 1y = \left(x\frac{1}{x}\right) y = \left(\frac{1}{x}x\right) y = \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}(xz) = \left(\frac{1}{x}x\right) z = \left(x\frac{1}{x}\right) z = 1z = z.$$

(ii) Sei $x \neq 0$ und $xy = x$, dann gilt $xy = x \cdot 1$ Also folgt aus (i) $y = 1$.
(iii) Sei $x \neq 0$ und $xy = 1$, dann gilt $xy = x \cdot x^{-1}$. Also folgt aus (i) $y = x^{-1.}$
(iv) Sei $x \neq 0$. Dann ist $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$. Also folgt (iv) aus (iii). **q.e.d.**

Satz 2.10 (Folgerungen aus **A1-A3**).

(i) $x \cdot 0 = 0$ *für alle x. Insbesondere gilt $x^{-1} \neq 0$ für alle $x \neq 0$.*

(ii) $x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *oder* $y = 0$

(iii) $(-x)y = -xy = x(-y)$.

(iv) $(-1) \cdot x = -x$

(v) $(-x)(-y) = xy$

(vi) $x \neq 0, y \neq 0$ *dann* $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Bemerkung 2.11. *Die Null hat kein multiplikatives Inverses, sonst wäre wegen (i)* $0 = 0 \cdot 0^{-1} = 1$*. Daraus und aus (i) würde* $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$ *für alle* x *folgen.*

Beweis: (i) $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0$. Aus (ii) von Satz 2.6 folgt dann $x \cdot 0 = 0$
(ii) Sei $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$. Dann gilt wegen (i) $x \cdot y = 0 = x \cdot 0$. Also folgt aus Satz 2.8 (i) $y = 0$.
(iii) $0 = 0 \cdot y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$. Aus (iii) im Satz 2.6 folgt dann

$$(-x)y = -xy = -yx = (-y)x = x(-y).$$

(iv) Setze in (iii) $x = 1$.
(v) Wegen (iii) und (iv) im Satz 2.6 gilt $(-x)(-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-xy) = xy$.
(vi) $1 = xy(xy)^{-1} = (xy)^{-1}xy = ((xy)^{-1}x)y = y((xy)^{-1}x)$. Wegen Satz 2.8 (iii) folgt $y^{-1} = (xy)^{-1}x$, also $y^{-1}x^{-1} = ((xy)^{-1}x)x^{-1} = (xy)^{-1}(xx^{-1}) = (xy)^{-1}$. **q.e.d.**

A4. Ordnungsaxiome 2.12. *Es gibt eine Relation* $<$ *in* $\mathbf{K}$ *mit drei Eigenschaften:*

(i) *Totalität der Ordnung: Für je zwei Zahlen* $x, y \in \mathbf{K}$ *gilt genau eine der drei folgenden Relationen* $x < y$ *oder* $x = y$ *oder* $y < x$*.*

(ii) *Transitivität:* $x < y$ *und* $y < z \Longrightarrow x < z$

(iii) *Monotonie:* $x < y \Longrightarrow \begin{cases} x + c < y + c & \textit{für alle } c \in \mathbf{K} \\ x \cdot c < y \cdot c & \textit{für alle } 0 < c \in \mathbf{K} \end{cases}$

Definition 2.13. *Ein Körper, der das Axiom* **A4** *erfüllt, heißt angeordneter Körper.*

Die rationalen Zahlen sind ein angeordneter Körper, und jeder angeordnete Körper enthält die rationalen Zahlen als Unterkörper. Wir benutzten folgende Abkürzungen:

$$x > y \Longleftrightarrow y < x \qquad\qquad x \leq y \Longleftrightarrow (x < y \text{ oder } x = y) \Longleftrightarrow y \geq x.$$

Satz 2.14 (Folgerungen aus **A1-A4**)**.**

(i) $0 < x \Longrightarrow -x < 0$ *und* $x < 0 \Longrightarrow -x > 0$

(ii) $x < y \Longleftrightarrow 0 < y - x$

(iii) $x < y$ *und* $a < 0 \Longrightarrow ya < xa$

(iv) $x \neq 0 \Longrightarrow x \cdot x = x^2 > 0$

(v) $x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0$

(vi) $0 < x < y \Longrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

Bemerkung 2.15. *Da $1 \cdot 1 = 1$ folgt aus (iv) $1 > 0$ und $1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$. Also ist Beispiel 2.5 kein angeordneter Körper. Außerdem folgt aus (i) $-1 < 0$. Also gilt $-1 < x^2$ für jedes $x \in \mathbf{K}$. Also gibt es keine Zahl $x \in \mathbf{K}$ mit $x^2 = -1$.*

Beweis: **(i)** Sei $0 < x$. Dann folgt mit Monotonie $0 + (-x) < x + (-x)$, also $-x < 0$. Sei $x < 0$. Dann folgt mit Monotonie $x + (-x) < -x$ also auch $0 < -x$.
(ii) Sei $x < y$. Dann folgt mit Monotonie $x - x < y - x$, also auch $0 < y - x$. Sei umgekehrt $0 < y - x$. Dann folgt mit Monotonie $x < y$.
(iii) Sei $x < y$ und $a < 0$. Dann folgt aus (i) $-a > 0$. Also gilt wegen Monotonie $-xa = x \cdot (-a) < y \cdot (-a) = -ya \iff 0 < xa - ya \iff ya < xa$.
(iv) Sei $x > 0$. Dann folgt wegen Monotonie $x^2 > 0 \cdot x = 0$. Sei $x < 0$. Dann folgt aus (i) $-x > 0$ und mit Monotonie $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0 \cdot (-x) = 0$.
(v) Sei $x > 0$. Dann ist $x \neq 0$ und $\frac{1}{x} \neq 0$. Aus (iv) folgt $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0$. Mit Monotonie folgt dann $\frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} > 0 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$.
(vi) Sei $0 < x < y$. Dann ist $x > 0$ und $y > 0$ also wegen (v) auch $\frac{1}{x} > 0$ und $\frac{1}{y} > 0$. Dann folgt mit Monotonie $\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot y = \frac{1}{x}$. **q.e.d.**

Satz 2.16 (Arithmetisches Mittel)**.** *Seien $x, y \in \mathbf{K}$, dann gilt*

$$x < y \Longrightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$

Also liegt zwischen zwei verschiedenen Zahlen immer eine weitere.

Beweis: Aus $x < y$ folgt mit Monotonie $x + x < x + y < y + y$. Weil aber $x + x = x(1 + 1) = 2x$ und $2 = 1 + 1 > 0$ folgt dann $2x < x + y < 2y$ und $x < \frac{x+y}{2} < y$ **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.17. *Es gelten auch folgende Regeln:*

(i) $a < b$ *und* $c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

(ii) $0 < a < b$ *und* $0 < c < d \Longrightarrow ac < bd$

(iii) $ab > 0 \iff$ *entweder* $a > 0, b > 0$ *oder* $a < 0, b < 0$

(iv) $ab < 0 \iff$ *entweder* $a > 0, b < 0$ *oder* $a < 0, b > 0$

Definition 2.18 (Betrag)**.** *Der Betrag einer Zahl $x \in \mathbf{K}$ ist die Zahl*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \iff 2x \geq 0 \iff x \geq -x \\ -x & \text{falls } x < 0 \iff 2x < 0 \iff x < -x \end{cases} = \max\{x, -x\}.$$

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x & \text{falls } y \leq x \\ y & \text{falls } y > x \end{cases} \qquad \forall x, y \in \mathbf{K}.$$

Aus der Definition folgt

$$
\begin{array}{ccc}
|x| \geq 0 & \text{und} & |x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0. \\
-|x| \leq x \leq |x| & \Longleftrightarrow & x \leq |x| \text{ und } -x \leq |x| \\
|-x| = |x| & \text{denn} & |-x| = \max\{-x, x\}.
\end{array}
$$

Satz 2.19 (Eigenschaften des Betrags)**.** *Für alle $x, y \in \mathbf{K}$ gilt:*

(i) $|x| \geq 0$ *und* $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis: **(i)** haben wir schon gesehen.
(ii) Wegen Satz 2.10 (iii) und (v) ändern sich beide Seiten nicht wenn wir x durch $-x$ bzw. y duch $-y$ ersetzen. Für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ ist die Aussage klar.
(iii) Zwei Fälle: $x + y \geq 0$: $|x + y| = x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$ wegen Monotonie.
$x + y < 0$: $|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |x| - y \leq |x| + |y|$ wegen Monotonie. **q.e.d.**

Korollar 2.20.
$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Beweis: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Longrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$.
Vertausche x und $y \Longrightarrow |y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$. Also gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$. **q.e.d.**

Definition 2.21 (Abstand)**.**
Der Abstand $d(x, y)$ zweier Zahlen $x, y \in \mathbf{K}$ ist die nicht negative Zahl $d(x, y) = |x - y|$.

Satz 2.22 (Eigenschaften des Abstands)**.**
Der Abstand $d : \mathbf{K} \times \mathbf{K} \to \mathbf{K}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$ hat folgende Eigenschaften:

(i) $d(x, y) \geq 0$ *und* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *für alle* $x, y, z \in \mathbf{K}$.

Beweis: folgt aus den Folgerungen der Definition und Satz 2.19.
(iii) $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. **q.e.d.**

Definition 2.23. *Sei $M \subset \mathbf{K}$ eine nicht leere Teilmenge von Zahlen.*

(i) *M heißt nach oben beschränkt, falls es eine Zahl $\beta \in \mathbf{K}$ gibt, so dass $x \leq \beta$ für alle $x \in M$ gilt. Dann heißt β obere Schranke von M.*

(ii) *M heißt nach unten beschränkt, falls es eine Zahl $\alpha \in \mathbf{K}$ gibt, so dass $\alpha \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Dann heißt α untere Schranke von M.*

(iii) *M heißt beschränkt, wenn M nach oben und unten beschränkt ist.*

Definition 2.24 (Maximum und Minimum)**.** *Für eine nicht leere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbf{K}$ heißt eine obere Schrank m von M, die in M liegt, Maximum. Wir schreiben dann $m = \max M$. Analog heißt eine untere Schranke m einer nicht leeren nach unten beschränkten Menge M, die in M liegt, Minimum. Wir schreiben dann $m = \min M$.*

Definition 2.25 (Supremum und Infimum einer Menge)**.** *Ein Minimum s der Menge aller oberen Schranken von einer nicht leeren nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbf{K}$ heißt Supremum. Wir schreiben dann $s = \sup M$. Analog heißt ein Maximum t der Menge aller unteren Schranken einer nach unten beschränkten Menge M Infimum. Wir schreiben dann $t = \inf M$.*

Bemerkung 2.26. *Wenn eine Menge ein Maximum bzw. Minimum besitzt, ist dieses eindeutig, weil es weder größer noch kleiner als ein anderes Maximum bzw. Minimum sein kann. Also sind auch Supremum und Infimum eindeutig, wenn sie existieren.*

Folgende Charakterisierung erleichtert manche Beweise:

$$\begin{aligned}
s = \sup M \quad &\iff \quad s \text{ ist obere Schranke von } M \text{ und } \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in M \text{ mit } s - \epsilon < x. \\
t = \inf M \quad &\iff \quad t \text{ ist untere Schranke von } M \text{ und } \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in M \text{ mit } x < t + \epsilon.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist jedes Maximum auch ein Supremum und jedes Minimum ein Infimum.

Warnung 2.27. *Das Supremum* $\sup M$ *bzw. das Infimum* $\inf M$ *muss im Unterschied zum Maximum bzw. Minimum kein Element von M sein.*

Wir definieren folgende Teilmengen eines angeordneten Körpers K. Nachdem wir $\mathbb{R}$ eingeführt haben, werden wir diese Symbole nur noch für Teilmengen von $\mathbb{R}$ benutzen:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathrm{K} \mid a \le x \le b\} && \text{für alle } a \le b \in \mathrm{K} \\
[a, b) &= \{x \in \mathrm{K} \mid a \le x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathrm{K} \\
(a, b] &= \{x \in \mathrm{K} \mid a < x \le b\} && \text{für alle } a < b \in \mathrm{K} \\
(a, b) &= \{x \in \mathrm{K} \mid a < x < b\} && \text{für alle } a < b \in \mathrm{K} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathrm{K} \mid x \le b\} && \text{für alle } b \in \mathrm{K} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathrm{K} \mid x < b\} && \text{für alle } b \in \mathrm{K} \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathrm{K} \mid a \le x\} && \text{für alle } a \in \mathrm{K} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathrm{K} \mid a < x\} && \text{für alle } a \in \mathrm{K}
\end{aligned}$$

$\mathrm{K}^+ = (0, \infty)$ positive Zahlen	$\mathrm{K}^- = (-\infty, 0)$ negative Zahlen
$\mathrm{K}^+_0 = [0, \infty)$ nichtnegative Zahlen	$\mathrm{K}^-_0 = (-\infty, 0]$ nichtpositive Zahlen

Offenbar ist b eine obere Schranke von (a,b). Andererseits gibt es wegen Satz 2.16 für jedes $x < b$ ein $y = \max\{\frac{x+b}{2}, \frac{a+b}{2}\}$ mit $x < y$ und $y \in (a,b)$. Also gibt es keine obere Schranke von (a,b), die kleiner ist als b. Damit ist $b = \sup(a,b)$. Analog gilt:

$$\begin{array}{llllll} a = \inf[a,b] & = \inf[a,b) & = \inf(a,b] & = \inf(a,b) & = \inf[a,\infty) & = \inf(a,\infty) \\ b = \sup[a,b] & = \sup[a,b) & = \sup(a,b] & = \sup(a,b) & = \sup(-\infty,b] & = \sup(-\infty,b) \end{array}$$

$$\begin{gathered} (-\infty,b] \text{ und } (-\infty,b) \text{ sind nicht nach unten beschränkt} \\ [a,\infty) \text{ und } (a,\infty) \text{ sind nicht nach oben beschränkt} \end{gathered}$$

$$\begin{array}{rr} \text{Also existiert} & \max[a,b] = \max(a,b] = \max(-\infty,b] = b \\ & \min[a,b] = \min[a,b) = \min[a,\infty) = a, \\ \text{während} & [a,b) \text{ und } (a,b) \text{ und } (-\infty,b) \text{ kein Maximum besitzen} \\ \text{und} & (a,b] \text{ und } (a,b) \text{ und } (a,\infty) \text{ kein Minimum.} \end{array}$$

2.2 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbf{K}$

Wir wollen die natürlichen Zahlen als Teilmenge eines angeordneten Körpers $\mathbf{K}$ charakterisieren. Aufgrund von **A2** gibt es das Element $1 \in \mathbb{N} \subset \mathbf{K} \setminus \{0\}$, das wegen (ii) in Satz 2.8 eindeutig ist. Aus (iv) im Satz 2.14 folgt $1 > 0$ aus $1 = 1 \cdot 1$. Wegen der Monotonie ist dann die Nachfolgerabbildung streng monoton:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{K} \to \mathbf{K}, & n \mapsto n+1 > n & & & \\ 1 \mapsto 1+1 = 2 > 1, & 2 \mapsto 2+1 = 3 > 2, & \ldots & n \mapsto n+1 > n, & \ldots \end{array}$$

Definition 2.28. *Eine Menge $M \subset \mathbf{K}$ heißt induktiv, falls*

(i) $1 \in M$ *(Einselement).*

(ii) $a \in M \Longrightarrow a+1 \in M$ *(invariant unter der Nachfolgerabbildung).*

$\mathbf{K}$ selber ist offenbar induktiv oder auch $[1,\infty)$. Offenbar ist der Durchschnitt von induktiven Mengen wieder induktiv.

Definition 2.29 (Natürliche Zahlen)**.** $\mathbb{N}$ *ist die kleinste induktive Teilmenge von* $\mathbf{K}$*, also der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von* $\mathbf{K}$*.*

Satz 2.30. *Es gilt* $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{n \in \mathbf{K} \mid n-1 \in \mathbb{N}\} = \{1\} \cup$ *Bild der Nachfolgerabbildung.*

Beweis: Wegen $(1+1)-1 = 1$, $(n+1)-1 = (n-1)+1$ und weil $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist, ist auch $S = \{1\} \cup \{n \in \mathbf{K} \mid n-1 \in \mathbb{N}\}$ eine induktive Menge. Also folgt $S \supset \mathbb{N}$. Weil $\mathbb{N}$ eine induktive Menge ist, folgt $S \subset \mathbb{N}$ aus $n = (n-1)+1$. **q.e.d.**

Satz 2.31 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Eine Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$ erfülle*
(i) $1 \in S$ **(ii)** $a \in S \Longrightarrow a + 1 \in S$. *Dann ist $S = \mathbb{N}$.*

Beweis: S ist offenbar eine induktive Menge. Also gilt $\mathbb{N} \subset S$. Andererseits ist S eine Teilmenge von $\mathbb{N}$. Also folgt $\mathbb{N} = S$. **q.e.d.**
Beweis durch vollständige Induktion: Um eine Aussage $A(n)$ über alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen genügt es also zu zeigen:

(i) die Aussage $A(1)$ ist richtig.

(ii) Falls die Aussage $A(n)$ richtig ist, dann auch $A(n + 1)$.

Ein solcher Beweis heißt Beweis durch vollständige Induktion.

Satz 2.32 (Bernoulli Ungleichung)**.** *Sei x^n für alle $x \in \mathbf{K}$ und $n \in \mathbb{N}$ das n-fache Produkt von x mit sich selber und $x^0 = 1$. Für $x \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$ sei $x^{-n} = 1/(x^n)$. Dann gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für alle } x \in (-1, \infty) \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gleichheit gilt nur für $x = 0$ oder $n = 1$.

Beweis durch vollständige Induktion: Für $x = 0$ oder $n = 1$ gilt offenbar die Gleichheit. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage

$$\text{Für alle } x \in (-1, 0) \cup (0, \infty) \quad \text{gilt} \quad (1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x.$$

(i) Wenn $x \neq 0$ dann folgt $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$. Also gilt $A(1)$.
(ii) Es gelte $A(n)$. Dann folgern wir für $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ aufgrund der Monotonie:

$$\text{Wegen } x > -1 \text{ gilt } 1 + x > 0, \quad \text{und wegen } x \neq 0 \text{ folgt daraus}$$

$$(1 + x)(1 + x)^{n+1} > (1 + x)(1 + (n + 1)x) = 1 + (n + 2)x + (n + 1)x^2 > 1 + (n + 2)x.$$

Also gilt $A(n + 1)$. **q.e.d.**

Satz 2.33. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es keine Zahl in $\mathbb{N}$ zwischen $n - 1$ und n.*

Beweis durch vollständige Induktion:
(i) $[1, \infty)$ ist eine induktive Menge. Also ist $\mathbb{N} \cap (0, 1) = \mathbb{N} \cap [1, \infty) \cap (0, 1) = \emptyset$.
(ii) Wir nehmen an, dass es für ein $n \in \mathbb{N}$ keine natürliche Zahl in $(n - 1, n)$ gibt. Wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{N} \cap (n, n + 1)$ gibt, dann liegt m wegen Satz 2.30 auch in $\{1\} \cup \{x \in \mathbf{K} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$. Wegen $1 \leq n < m$ ist m nicht gleich 1. Also liegt m dann in $\{n \in \mathbf{K} \mid n - 1 \in \mathbb{N}\}$. Wegen der Monotonie liegt $m - 1$ dann in $\mathbb{N} \cap (n - 1, n)$, was der Annahme wiederspricht. Also gibt es keine natürliche Zahl in $\mathbb{N} \cap (n, n + 1)$.**q.e.d.**

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist also $\{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n + 1\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} \cup \{n + 1\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir deshalb $\{1, \ldots, n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$.

Satz 2.34 (Wohlordnungsprinzip)**.** *Für jede nichtleere Menge* $M \subset \mathbb{N}$ *existiert* $\min M$*.*

Beweis: Wenn $n \in M \subset \mathbb{N}$, dann ist offenbar jedes Minimum von $M \cap \{1, \dots, n\}$ auch ein Minimum von M und umgekehrt. Deshalb zeigen wir mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ jede nichtleere Teilmenge $M \subset \{1, \dots, n\}$ ein Minimum besitzt:
(i) Jede nichtleere Teilmenge von $\{1\}$ ist gleich $\{1\}$ mit Minumum $\min\{1\} = 1$.
(ii) Für jede nichtleere Teilmenge $M \subset \{1, \dots, n+1\}$ ist entweder $M \cap \{1, \dots, n\}$ nichtleer oder $M = \{n+1\}$. Wenn also jede nichtleere Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ eine Minimum hat, dann auch jede nichtleere Teilmenge von $\{1, \dots, n+1\}$. **q.e.d.**

Für zwei verschiedene angeordnete Körper $\mathbf{K}$ und $\mathbf{K}'$ gibt es eine eindeutige Abbildung, die $1_\mathbf{K}$ auf $1_{\mathbf{K}'}$ abbildet, $1_\mathbf{K} + 1_\mathbf{K}$ auf $1_{\mathbf{K}'} + 1_{\mathbf{K}'}$, $1_\mathbf{K} + 1_\mathbf{K} + 1_\mathbf{K}$ auf $1_{\mathbf{K}'} + 1_{\mathbf{K}'} + 1_{\mathbf{K}'}$ usw. Wegen dem Prinzip der vollständigen Induktion ist der Definitionsbereich $\mathbb{N}_\mathbf{K}$, und das Bild ist $\mathbb{N}_{\mathbf{K}'}$. Also sind die natürlichen Zahlen in dem Sinne eindeutig, dass $\mathbb{N}_\mathbf{K}$ auf eindeutige Weise mit $\mathbb{N}_{\mathbf{K}'}$ identifiziert wird, wenn $1_\mathbf{K}$ mit $1_{\mathbf{K}'}$ und Nachfolger mit Nachfolgern identifiziert werden. Analoge Aussagen gelten für folgende Mengen:

Definition 2.35 (ganze Zahlen $\mathbb{Z}$, rationale Zahlen $\mathbb{Q}$)**.**

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{x \in K \mid -x \in \mathbb{N}\}, \quad \mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} \in \mathbf{K} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

2.3 Mächtigkeit von Mengen

Definition 2.36. *Zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn es eine bijektive Abbildung zwischen ihnen gibt.*

Diese Relation von Mengen ist eine Äquivalenzrelation. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass $\{1, \dots, n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von sich ist: (i) Die einzige echte Teilmenge von $\{1\}$ ist leer. (ii) Eine bijektive Abbildung f von $\{1, \dots, n+1\}$ auf eine echte Teilmenge von $\{1, \dots, n+1\}$ bildet $\{1, \dots, n\}$ bijektiv auf eine echte Teilmenge von $\{1, \dots, n+1\} \setminus \{f(n+1)\}$ ab, also auf eine zu einer echten Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ gleichmächtige Menge. Das zeigt die Aussage, also insbesondere, dass $\{1, \dots, n\}$ und $\{1, \dots, m\}$ nur für $n = m$ gleichmächtig sind.

Wenn wir $1 \in \mathbb{N}$ mit der Äquivalenzklasse von $\{\emptyset\}$ indentifizieren und für Mengen die Nachfolgerabbildung $A \mapsto A \cup \{A\}$ definieren, werden die natürlichen Zahlen mit den Äquivalenzklassen folgender Mengen identifiziert:

$$\begin{array}{ccl}
1 & \leftrightarrow & \{\emptyset\} \\
2 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 & \leftrightarrow & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
\vdots & & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots, \}\}
\end{array}$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen kann man als eine Erweiterung von $\mathbb{N}$ betrachten.

Definition 2.37. *Eine nicht leere Menge A heißt*

endlich, *falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass A gleichmächtig ist zu $\{1, 2, \ldots, n\}$,*

unendlich, *falls sie nicht endlich ist,*

abzählbar, *falls sie gleichmächtig ist zu $\mathbb{N}$,*

höchstens abzählbar, *wenn sie endlich oder abzählbar ist,*

überabzählbar, *wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.*

Satz 2.38. **(i)** *Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist höchstens abzählbar.*

(ii) *Eine Menge A ist genau dann höchstens abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A gibt.*

Beweis: **(i)** Mit dem Wohlordnungsprinzip nummerieren wir der Größe nach mit dem kleinsten Element anfangend jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ durch. Für alle $m \in M$ ist $\{1, \ldots, m\} \cap M$ gleichmächtig zu $\{1, \ldots, n\}$ für ein $n \in \{1, \ldots, m\}$. Wenn M nach oben unbeschränkt ist, erhalten wir eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M und M ist abzählbar. Andernfalls ist $M \subset \{1, \ldots, m\}$ für ein $m \in M$ und damit endlich.
(ii) Sei A eine höchstens abzählbare Menge. Wenn A endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass A gleichmächtig ist zu $\{1, 2, \ldots, n\}$. Die Abbildung $\mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, n\}, \quad m \mapsto \min\{m, n\}$ ist eine surjektive Abbildung, so dass dann auch eine surjektive Abbildung auf A existiert. Wenn A abzählbar ist, gibt es eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A.

Sei umgekehrt A eine Menge und f eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf A. Dann existiert eine Abbildung $g : A \to \mathbb{N}, \quad a \mapsto \min f^{-1}[\{a\}]$, die offenbar eine bijektive Abbildung von A auf eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ definiert. Also ist A gleichmächtig zu einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ und damit wegen (i) höchstens abzählbar. **q.e.d.**

Übungsaufgabe 2.39. *Zeige, dass jede endliche Teilmenge der reellen Zahlen ein Maximum und ein Minimum besitzt.*

Satz 2.40. **(i)** *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

(ii) *Eine höchstens abzählbare Vereinigung von höchstens abzählbaren Mengen ist wieder höchstens abzählbar.*

Beweis: **(i)** Wir definieren die sogenannte Diagonalnummerierung als die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) = y + \frac{(x + y - 2)(x + y - 1)}{2} = y + \sum_{n=0}^{x+y-2} n.$$

Diese Abbildung ist injektiv. Gilt nämlich $x + y < x' + y'$ so folgt aus

$$f(x, y) - y \leq f(x', y') - y' - (x' + y' - 2) \quad \text{und } y - y' < y \leq x + y - 1 \leq x' + y' - 2$$

$$f(x,y) \leq f(x',y') + y - y' - (x' + y' - 2) < f(x',y').$$

Gilt aber $x + y = x' + y'$ so gilt auch $f(x,y) - f(x',y') = y - y'$.
Also ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig zum Bild von f. Wegen $f(x,y) \geq y$ ist das Bild nicht beschränkt und nicht endllich. Wegen (i) vom vorangehenden Satz ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.
(ii) Wegen (ii) im vorangehenden Satz gibt es eine surjektive Abbildung $n \mapsto A_n$ von $\mathbb{N}$ auf die höchstens abzählbar vielen Mengen. Wegen (ii) im vorangehenden Satz gibt es dann für alle $n \in \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung $f_n : \mathbb{N} \to A_n$. Dann ist

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad (n,m) \mapsto f_n(m)$$

eine surjektive Abbildung. Also folgt (ii) aus (i) und dem vorangehenden Satz. **q.e.d.**

Korollar 2.41. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Beweis: $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad (m,n) \mapsto \frac{m}{n}$ ist eine surjektive Abbildung. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, also ist $\mathbb{Q}$ höchstens abzählbar. $\mathbb{Q}$ ist aber nicht endlich und damit abzählbar. **q.e.d.**

2.4 $\mathbb{R}$ und das Vollständigkeitsaxiom

A5. Vollständigkeitsaxiom 2.42. *Für jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge M eines angeordneten Körpers* **K** *exisitiert das Supremum $s = \sup M \in$* **K**.

Wir werden sehen, dass die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ **A1-A4** erfüllen aber nicht **A5**. Man kann zeigen, dass zwei angeordnete Körper, für die **A5** gilt, isomorph sind.

Definition 2.43. *Sei $\mathbb{R}$ der angeordnete Körper, in dem* **A5** *gilt.*

Satz 2.44 (Folgerungen aus **A5**).

(i) *Jede nicht leere nach unten beschränkte Menge M besitzt ein Infimum $\inf M \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Eine nicht leere nach oben beschränkte Menge M besitzt genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$. In diesem Fall ist $\max M = \sup M$.*

(iii) *Eine nicht leere nach unten beschränkte Menge M besitzt genau dann ein Minimum, wenn $\inf M \in M$. In diesem Fall ist $\min M = \inf M$.*

Beweis: (i) Weil die Ordnungsrelation nicht symmetrisch ist, erhalten wir dadurch, dass wir in einer Aussage alle auftauchenden Ordnungsrelationen umkehren, eine andere Aussage. Zum Beispiel erhalten wir die Definition der unteren Schranke, indem wir in der Definition der oberen Schranke alle Ordnungsrelationen umdrehen. Dann erhalten wir aber auch die Definition des Infimums, indem wir in der Definition des Supremums alle Ordnungsrelationen umkehren. Weil $x < y \iff -y < -x$, sind also Aussagen

über Ordnungsrelationen zwischen reellen Zahlen äquivalent zu den analogen Aussagen, in denen wir alle Ordnungsrelationen umdrehen und alle reellen Zahlen durch ihre Negativen ersetzen[1]. Insbesondere besitzt die Menge M genau dann ein Infimum, wenn die Menge $-M = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$ ein Supremum besitzt und es gilt $\inf M = -\sup -M$. Also folgt (i) aus dem Vollständigkeitsaxiom **A5**.
(ii) Wenn $\sup M \in M$, dann ist $\sup M$ eine obere Schranke von M, die Element von M ist. Wenn $\sup M \notin M$, dann gilt sogar $x < \sup M \leq s$ für alle $x \in M$ und alle oberen Schranken s von M. Also gibt es in M keine obere Schranke von M.
(iii) analog zu (ii). **q.e.d.**

Satz 2.45 (Archimedes-Eudoxos)**.**

(i) *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl $n > x$ (Archimedes).*

(ii) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$ (Eudoxos).*

Beweis: (i) Es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{N}$ keine obere Schranke hat. Wenn $\mathbb{N}$ eine obere Schranke hat, dann existiert $\sup \mathbb{N}$, und $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > \sup \mathbb{N} - 1$, weil $\sup \mathbb{N} - 1$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$ ist. Dann gilt $\mathbb{N} \ni n + 1 > \sup \mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist.
(ii) Nach (i) gibt es ein $n > \frac{1}{\epsilon}$. Aus Satz 2.14 (v)-(vi) folgt $\frac{1}{n} < \epsilon$. **q.e.d.**

Bemerkung 2.46. *In einem angeordneten Körper sind die beiden Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 2.45 wegen Satz 2.14 (v)-(vi) äquivalent. Ein angeordneter Körper heißt archimedisch, wenn (i) oder (ii) gilt. In jedem angeordneten Körper sind die rationalen Zahlen archimedisch. Es gibt auch nicht archimedische angeordnete Körper.*

Wegen dem Teil (i) von Archimedes enthalten die Intervalle (a, b) rationale Zahlen:

Satz 2.47. *Sei $a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a < \frac{m}{n} < b$ äquivalent zu $na < m < nb$. Wegen $b - a > 0$ gibt es nach Satz 2.45 (i) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{b-a}$. Dann gilt $na < nb$ und $nb - na > 1$.

Wir nehmen zunächst $a \geq 0$ an. Sei m die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als na. Wegen Satz 2.30 sind die natürlichen Zahlen enthalten in $\{1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \in \mathbb{N}\}$. Also ist $m - 1$ entweder eine natürliche Zahl oder gleich Null. Dann folgt

$$m - 1 \leq na < m \quad \iff \quad na < m \leq na + 1 < nb.$$

Als nächstes nehmen wir $b \leq 0$ an. Sei $-m$ die kleinste natürliche Zahl, die größer ist als $-nb$. Wieder ist $-m - 1$ entweder eine natürliche Zahl oder Null. Also folgt

$$-m - 1 \leq -nb < -m \quad \iff \quad na < nb - 1 \leq m < nb.$$

[1]Wenn diese Aussagen aber algebraische Operationen benutzen, die nicht verträglich sind mit der Abbildung jeder reellen Zahl auf ihre Negative, wie z. B. das Produkt zweier reeller Zahlen, dann müssen bei dieser Ersetzung auch die algebraischen Operationen entsprechend geändert werden, also z. B. das Produkt in das negative des Produktes.

Wenn $a < 0$ und $b > 0$ ist, wählen wir $m = 0$. **q.e.d.**

Wir haben sogar gezeigt, dass $\forall a < b$ mit $b - a > 1$ das Intervall (a, b) eine ganze Zahl enthält. Also enthält jedes Intervall mindestens eine und damit sogar unendlich viele rationale Zahlen. Insbesondere gibt es für jede reelle Zahl x und jedes $\epsilon > 0$ eine rationale Zahl $r \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$, die dann $d(x, r) < \epsilon$ erfüllt. Wir sagen, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Die rationalen Zahlen erfüllen als Unterkörper der reellen Zahlen die Axiome **A1-A4**. Wir werden gleich sehen, dass sie nicht das Vollständigkeitsaxiom **A5** erfüllen.

Satz 2.48 (Quadratwurzeln). *Für alle $a > 0$ gibt es genau ein $b > 0$ mit $b^2 = a$.*

Wir schreiben $b = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

Beweis der Eindeutigkeit: Aus $0 < x < y$ folgt aufgrund der Monotonie $x^2 < xy < y^2$. Also gibt es höchstens ein $b > 0$ mit $b^2 = a$.

Beweis der Existenz: Die Menge $M = \{x \in [0, \infty) \mid x^2 < a\}$ enthält 0. Dann gilt

$$x^2 > x(a + 1) > (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1 > 2a > a \quad \text{für} \quad x > a + 1.$$

Also ist $a + 1$ eine obere Schranke von M. Sei $b = \sup M$. Aus $0 \in M$ folgt $0 \leq b$.

Wenn $b^2 < a$, folgt $0 < a - b^2$. Für $h = \min\{1, \frac{a-b^2}{2b+2}\}$ gilt also $0 < h \leq 1$ und $h(2b + 2) \leq a - b^2$ und damit auch

$$(b+h)^2 = b^2+2bh+h^2 \leq b^2+2bh+h = b^2+h(2b+1) < b^2+h(2b+2) \leq b^2+a-b^2 = a.$$

Also ist $b < b + h \in M$ im Widerspruch zu $b = \sup M$.

Wenn $a < b^2$, folgt $0 < b$, $-b^2 < a - b^2 < 0$ und $-\frac{1}{2} < \frac{a-b^2}{2b^2} < 0$. Also folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\left(b\left(1 + \frac{a - b^2}{2b^2}\right)\right)^2 = b^2\left(1 + \frac{a - b^2}{2b^2}\right)^2 \geq b^2\left(1 + 2\frac{a - b^2}{2b^2}\right) = a.$$

Dann folgt aus $x > b(1 + \frac{a-b^2}{2b^2})$ wieder $x^2 > b^2(1 + \frac{a-b^2}{2b^2})^2 \geq a$ und damit auch $x \notin M$. Also ist $b(1 + \frac{a-b^2}{2b^2}) < b$ eine obere Schranke von M im Widerspruch zu $b = \sup M$.

Weil also weder $b^2 < a$ noch $a < b^2$ gilt, folgt $b^2 = a$ und $b \neq 0$. **q.e.d.**

Insbesondere gibt es also genau ein $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Wir werden in Beispiel 3.9 für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen, dass es für jedes $a > 0$ genau ein $b > 0$ gibt mit $b^n = a$.

Lemma 2.49. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *Insbesondere erfüllt $\mathbb{Q}$ nicht das Vollständigkeitsaxiom* **A5**.

Beweis: Wir zeigen, dass es nicht zwei natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ geben kann mit $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Wenn es zwei solche Zahlen gibt, dann sei n_0 das Minimum der Teilmenge

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } m^2 = 2n^2\}.$$

Also gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_0^2 = 2n_0^2$. Dann enthält $(\frac{m_0-1}{2}, \frac{m_0+2}{2})$ eine positve ganze Zahl m_1. Aus $m_0 \in (2m_1 - 2, 2m_1 + 1)$ folgt entweder $m_0 = 2m_1 - 1$ oder $m_0 = 2m_1$.

Im ersten Fall widerspricht $n_0^2 = 2m_1^2 - m_1 + \frac{1}{2} \in (2m_1^2 - m_1, 2m_1^2 - m_1 + 1)$ dem Satz 2.33. Im zweiten Fall ist $n_0^2 = 2m_1^2$, also $m_1 \in M$. Dann folgt $n_0 = \inf M \leq m_1$ und $n_0^2 \leq m_1^2$ im Widerspruch zu $m_1^2 < 2m_1^2 = n_0^2$. **q.e.d.**

Satz 2.50 (Intervallschachtelungsprinzip)**.** *Seien $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ für $n = 1, 2, \ldots$ abgeschlossene Intervalle mit $a_n < b_n$ und den beiden folgenden Eigenschaften:*

(i) *$I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b_n - a_n < \epsilon$.*

Dann enthält der Durchschnitt $\bigcap_{n\geq 1} I_n = \{x\}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$.

Dieser Satz ist für offene Intervalle falsch. Z.B. $\bigcap_{n\geq 1} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$ nach Satz 2.45.
Beweis: Wegen (i) gilt

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

Also besteht die Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ aus unteren Schranken der Menge $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ und umgekehrt die Menge B aus oberen Schranken der Menge A. Dann liegen $x = \sup A$ und $y = \inf B$ in der Schnittmenge der oberen Schranken von A mit den unteren Schranken von B, was gleich $\bigcap_{n>1} I_n$ ist. Dann folgt $x \leq y$ und $\bigcap_{n>1} I_n = [x, y]$. Andererseits gibt es wegen (ii) für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y - x \leq b_n - a_n < \epsilon$. Dann muss aber $0 \leq y - x \leq \inf\{\epsilon \mid \epsilon > 0\} = 0$ und deshalb $y = x$ gelten. **q.e.d.**

Satz 2.51. *In jedem angeordneten archimedischen Körper folgt aus dem Intervallschachtelungsprinzip im Satz 2.50 das Vollständigkeitsaxiom* **A5**.

Beweis*: Sei M eine nicht leere nach oben beschränkte Menge, a_1 ein Element von M und $b_1 > a_1$ eine obere Schranke von M. Wir definieren induktiv eine Folgen $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ von Elementen von M und eine Folge $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ von oberen Schranken von M. Wenn $\frac{a_n+b_n}{2}$ keine obere Schranke von M ist, dann gibt es ein Element $a_{n+1} \in [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n] \cap M$ und wir setzen $b_{n+1} = b_n$. Wenn $\frac{a_n+b_n}{2}$ eine obere Schranke von M ist setzten wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Offenbar gilt

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2^{-1}(b_n - a_n) \leq 2^{-2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \leq \ldots \leq 2^{-n}(b_1 - a_1).$$

Aus der Bernoulli Ungleichung folgt $2^n > n$ und wegen Satz 2.45 (ii) gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n}(b_1 - a_1) < \frac{b_1 - a_1}{n} < \epsilon$. Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip besteht die Schnittmenge der Intervalle $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ aus einer Zahl $s \in \mathbb{R}$.

Für jede Zahl $x > s$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x-s}{b_1-a_1} > \frac{1}{n} > 2^{-n}$. Daraus folgt $b_{n+1} \leq a_{n+1} + 2^{-n}(b_1 - a_1) < s + (x - s) = x$. Weil b_{n+1} eine obere Schranke von M ist folgt $x \notin M$. Also ist s eine obere Schranke von M. Für jede Zahl $x < s$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{s-x}{b_1-a_1} > \frac{1}{n} > 2^{-n}$. Daraus folgt $a_{n+1} \geq b_{n+1} - 2^{-n}(b_1 - a_1) > s - (s - x) = x$. Wegen $a_{n+1} \in M$ ist x keine obere Schranke von M. Also ist $s = \sup M$. **q.e.d.**

Deshalb können die reellen Zahlen auch als angeordneter archimedischer Körper charakterisert werden, in dem das Intervallschachtelungsprinzip gilt.

Satz 2.52. *Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis: Wir nehmen an, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Durchnumerierung von $\mathbb{R}$. Wähle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $I_1 = [a, b]$. Wir definieren induktiv eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen wir in $I_n = [a_n, b_n]$ als I_{n+1} eins der beiden schnittfremden Teilintervalle $[a_n, a_n + \frac{b_n-a_n}{3}]$ und $[b_n - \frac{b_n-a_n}{3}, b_n]$, das x_n nicht enthält. Für alle $n \in \mathbb{N}$ liegt dann x_n nicht in I_{n+1}. Wegen der Bernoulli Ungleichung 2.32 gilt

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \tfrac{b_n-a_n}{3} = \ldots = \tfrac{b_1-a_1}{3^n} \leq \tfrac{b-a}{1+2n} < \tfrac{b-a}{2n} < \epsilon \text{ für } \epsilon > 0 \text{ und } n > \tfrac{b-a}{2\epsilon}.$$

Wegen dem Intervallschachtelungsprinzip enthält $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ ein Element, das nicht zu $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gehört. Das widerspricht der Annahme, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist. **q.e.d.**

Auch die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar. Wir können sie mit den Folgen identifizieren, die Werte in $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ annehmen, also der Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}_2$. Diese Folgen werden wir mithilfe der dyadischen Entwicklung mit der Teilmenge $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ identifizieren. Diese ist gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

2.5 Die erweiterte Zahlengerade $\bar{\mathbb{R}}$

Definition 2.53. *Die erweiterte Zahlengerade besteht aus $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.*

Mit ∞ bezeichnen wir auch $+\infty$. Die Ordnungsrelation läßt sich auf $\bar{\mathbb{R}}$ durch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ fortsetzen und erfüllt offensichtlich auch (i) und (ii) des Ordnungsaxioms. Die Operationen $+$ und $\cdot$ lassen sich nicht auf $\bar{\mathbb{R}}$ fortsetzen, so dass **A1**-**A4** gilt: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ würde aus $y-x < \infty$ wegen der Monotonie $y < \infty+x$ folgen. Deshalb müsste $\infty + x = \infty$ gelten. Aus Satz 2.6 (ii) würde $x = 0$ folgen. $\bar{\mathbb{R}}$ ist also kein angeordneter Körper.

Die Definitionen von oberen und unteren Schranken, von Supremum und Infimum, und von Maximum und Infimum übertragen sich auf die erweiterte Zahlengerade. Offenbar ist ∞ das Maximum und $-\infty$ das Minimum von $\bar{\mathbb{R}}$. Insbesondere ist ∞ eine obere Schranke und $-\infty$ eine untere Schranke von jeder Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$. Weil ∞ die einzige obere Schranke einer nicht leeren Teilmenge M von $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$ ist, die in $\mathbb{R}$ keine obere Schranke hat, ist ∞ dann das Supremum von M als Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$. Analog ist $-\infty$ das Infimum einer nicht leeren Teilmenge von $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{R}}$, die keine untere Schranke in $\mathbb{R}$ hat. In $\bar{\mathbb{R}}$ gilt $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = \infty$. Daraus folgt, dass jede Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum hat. Außerdem gilt wieder, dass eine Teilmenge $M \subset \bar{\mathbb{R}}$ genau dann ein Maximum bzw. Infimum hat, wenn $\sup M \in M$ bzw. $\inf M \in M$ gilt. In diesen Fällen ist wieder $\max M = \sup M$ bzw. $\min M = \inf M$. Wir benutzen die Symbole sup, inf, max und min sowohl für Teilmengen von $\mathbb{R}$ als auch für Teilmengen von $\bar{\mathbb{R}}$, so dass aus dem Zusammenhang klar werden muss, was genau gemeint ist.

2.6 Die Peano Axiome

Es gibt andere Möglichkeiten die reellen Zahlen einzuführen. Man kann zuerst die natürlichen Zahlen einführen und danach der Reihe nach die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen. Dabei kann man die natürlichen Zahlen im Rahmen der Mengenlehre einführen oder sie durch die Peano Axiome charakterisieren:

1. Peano Axiom: $1 \in \mathbb{N}$ (Einselement).

2. Peano Axiom: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists$ genau einen Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$ (Nachfolgerabbildung).

3. Peano Axiom: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n' \neq 1$ (Eins $\notin$ Bild der Nachfolgerabbildung).

4. Peano Axiom: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ folgt $n = m$ aus $n' = m'$ (Injektivität der Nachfolgerabbildung).

5. Peano Axiom: Jede induktive Teilmenge $S \subset \mathbb{N}$, d.h. jede Teilmenge mit folgenden Eigenschaften umfaßt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset S$:

(i) $1 \in S$. **(ii)** Falls $n \in S$, dann ist auch $n' \in S$.

Man kann die natürlichen Zahlen durch diese Axiome charakterisieren und damit die reellen Zahlen einfüren. Dafür muss viel Schlussfolgerungsarbeit geleistet werden, bevor die reellen Zahlen eingeführt sind (vgl. E. Landau: Grundlagen der Analysis). Wir skizzieren in diesem Abschnitt, wodurch sich diese zweite Einführung der reellen Zahlen, von der von uns gewählten unterscheidet, und stellen sie in ihren Grundzügen vor.
Die Addition von natürlichen Zahlen $n + m$ wird $\forall n, m \in \mathbb{N}$ so eingeführt, dass **(i)** $n + 1 = n'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und **(ii)** $n + m' = (n + m)'$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.
Für $n = 1$ gilt $1+1 = 1'$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ folgt aus $1+m = m'$ auch $1+m' = (m')' = (1 + m)'$. Wegen dem 5. Peano Axiom ist also $1 + m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ durch m' definiert. Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ durch diese Bedingungen $n + m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert ist, dann folgt aus (i) $n' + 1 = (n')' = (n + 1)'$. Wenn $n' + m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ definiert ist, dann folgt aus (ii) $n' + m' = (n' + m)'$ also ist dann wegen dem 5. Peano Axiom $n' + m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert. Also ist wegen dem 5. Peano Axiom die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die $n + m$ durch diese Bedingungen für alle $m \in \mathbb{N}$ definiert ist gleich $\mathbb{N}$. Deshalb ist dadurch die Addition zwischen allen natürlichen Zahlen definiert. Mit Hilfe der Peano Axiome kann man dann folgern, dass die Addition kommutativ und assoziativ ist.
Die Multiplikation von natürlichen Zahlen nm wird $\forall n, m \in \mathbb{N}$ so eingeführt, dass **(i)** $n1 = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und **(ii)** $nm' = n \cdot m + n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt.
Wieder kann man aus den Peano Axiomen folgern, dass diese Bedingungen eine Multiplikation $n \cdot m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ definiert. Danach zeigt man, dass auch die Multiplikation kommutativ, assoziativ und zusammen mit der Addition distributiv ist.
Die Ordnungsrelation wird auf den natürlichen Zahlen durch $n < n + m$ und $m < n + m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ eingeführt. Sie erfüllt **A4** wobei alle $n \in \mathbb{N}$ als positiv gelten.

Ganze Zahlen: Die ganzen Zahlen werden als formale Differenzen $n - m$ eingeführt. Wegen $n - m = \tilde{n} - \tilde{m} \Leftrightarrow n + \tilde{m} = \tilde{n} + m$ sind das Äquivalenzklassen in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(n, m) \sim (\tilde{n}, \tilde{m}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad n + \tilde{m} = \tilde{n} + m \qquad \forall (n, m), (\tilde{n}, \tilde{m}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Die Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation von $\mathbb{N}$ wird auf $\mathbb{Z}$ fortgesetzt.
Rationale Zahlen: Die rationalen Zahlen werden als formale Brüche $\frac{m}{n}$ mit $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eingeführt. Wegen $\frac{m}{n} = \frac{\tilde{m}}{\tilde{n}} \Leftrightarrow m\tilde{n} = \tilde{m}n$ sind das Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$$(m, n) \sim (\tilde{m}, \tilde{n}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\tilde{n} = \tilde{m}n \qquad \forall (m, n), (\tilde{m}, \tilde{n}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation wird auf $\mathbb{Q}$ definiert, so dass **A1-A4** gilt.
Reelle Zahlen werden als Dedekindsche Schnitte eingeführt, also Mengen $A \subset \mathbb{Q}$ mit

(i) $A \neq \emptyset, \mathbb{Q}$ **(ii)** $p \in A$ und $q < p \Rightarrow q \in A$. **(iii)** A hat kein Maximum.
Dabei entspricht $a \in \mathbb{R}$ dem Dedekindschen Schnitt $A = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ mit $a = \sup A$.
Addition, Multiplikation, Ordnungsrelation wird auf $\mathbb{R}$ definiert, so dass **A1-A5** gilt.

2.7 Der Körper der komplexen Zahlen

Motivation: Wir hatten aus der Ordnungsrelation gefolgert, dass $x^2 > 0$ gilt, falls $x \neq 0$. Deshalb existieren in den reellen Zahlen keine Quadratwurzeln von negativen Zahlen. Erweitert man die reellen Zahlen durch eine Quadratwurzel $\imath$ von -1, so erhält man die komplexen Zahlen, in denen sich dann alle algebraischen Gleichungen lösen lassen.

Definition 2.54 (Komplexe Zahlen)**.** *Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller geordneten Paare (x, y) von reellen Zahlen zusammen mit den Operationen*

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad && ((x, y), (u, v)) \mapsto (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \\ \cdot : \quad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad && ((x, y), (u, v)) \mapsto (xu - yv, xv + yu) \end{aligned}$$

Mit dieser Definition erfüllt $\mathbb{C}$ die Körperaxiome **A1-A3**. Dabei ist

$$\text{Null} : \qquad 0_{\mathbb{C}} = (0, 0) \qquad\qquad \text{Eins} : \qquad 1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{negatives Element} : \quad & -(x, y) = (-x, -y) \\ \text{inverses Element} : \quad & (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \qquad \text{für } (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen komplexe Zahlen meistens durch einen Buchstaben, üblicherweise z. Die Null und die Eins bezeichnen wir auch durch 0 und 1, so dass aus dem Zusammenhang klar werden muss, ob es sich um die Null bzw. Eins der reellen oder komplexen Zahlen handelt. Außerdem benutzen wir dieselben Abkürzungen wie bei den reellen Zahlen:

$$z + (-z) = z - z = 0 \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} \qquad z \cdot \frac{1}{z} = 1 \qquad \text{usw.}$$

Da die komplexen Zahlen eine Erweiterung der reellen Zahlen sind, wollen wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen. Dafür definieren wir eine injektive Abbildung

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0)$$

Offenbar ist diese Abbildung verträglich mit den Operationen $+$ und $\cdot$ von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{cc} (x,0) + (y,0) = (x+y,0) & (x,0) \cdot (y,0) = (xy,0) \\ (0,0) = 0 & (1,0) = 1 \\ -(x,0) = (-x,0) & (x,0)^{-1} = (x^{-1},0) \end{array}$$

Definition 2.55 (Imaginäre Einheit)**.** $\imath = (0,1) \in \mathbb{C}$ *mit* $\imath^2 = (-1,0) = -1$.

Wir schreiben also $(x,y) = x + \imath y$. Dann ergeben sich die Operationen $+$ und $\cdot$

$$\begin{aligned} x + \imath y + u + \imath v &= x + u + \imath(y, v) \\ (x + \imath y)(u + \imath v) &= xu + \imath(yu + xv) + \imath^2 yv = xu - yv + \imath(yu + xv) \end{aligned}$$

Für die komplexe Zahl $z = x + \imath y$ heißt

$x = \Re(z)$ Realteil von z	$y = \Im(z)$ Imaginärteil von z
z heißt reell, falls $\Im(z) = 0$	z heißt imaginär, falls $\Re(z) = 0$

Definition 2.56 (komplexe Konjugation)**.** *Die Abbildung* $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = x + \imath y \mapsto \bar{z} = x - \imath y$ *heißt komplexe Konjugation oder einfach nur Konjugation*

Die komplexen Zahlen erhalten wir aus den reellen Zahlen, indem wir reelle Vielfache einer Wurzel aus -1 hinzufügen. Weil aber $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist das Negative einer Wurzel aus -1 wieder eine Wurzel aus -1. Welche dieser beiden Wurzeln aus -1 wir zur imaginären Einheit machen ist aber eine Konvention. Das legt nahe, dass die Konjugation ein Endomorphismus der komplexen Zahlen, d.h. eine bijektive Abbildung, die mit den Operationen $+$ und $\cdot$ verträglich ist, die die reellen Zahlen invariant läßt:

Satz 2.57. **(i)** $(\bar{\bar{z}}) = z$

(ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

(iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

(iv) $z + \bar{z} = 2\Re z$ *und* $z - \bar{z} = 2\imath\Im(z)$

(v) $z \cdot \bar{z}$ *ist reell und nicht negativ.*

Beweis: (i)-(iv) nachrechnen. **(v)** $(x + \imath y)(x - \imath y) = x^2 + y^2 \geq 0$. **q.e.d.**

Definition 2.58 (Betrag)**.** *Der Betrag einer komplexen Zahl* $z = x + \imath y$ *ist definiert als die reelle nicht negative Wurzel aus* $z \cdot \bar{z}$*, d.h.* $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Satz 2.59 (Eigenschaften des Betrags)**.**

(i) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0 \iff z = 0$

(ii) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

(iv) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

(v) $|\bar{z}| = |z|$

(vi) $|\Re(z)| \leq |z|$ *und* $|\Im(z)| \leq |z|$

Beweis: (i) Für $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ gilt $|x+\imath y| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ und andernfalls $|0| = 0$.
(ii) folgt wegen der Eindeutigkeit der Wurzel aus $|z \cdot w|^2 = zw\overline{(zw)} = z\bar{z}w\bar{w} = (|z||w|)^2$.
(v) folgt wegen der Eindeutigkeit der Wurzel aus $|\bar{z}|^2 = \bar{z}z = |z|^2$.
(vi) Für $z = 0$ gilt die Aussage. Sei also $z = x + \imath y \neq 0$. Dann gilt $x^2 \leq x^2 + y^2$. Aus $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < x$ folgt aber mit Monotonie $x^2 + y^2 < x\sqrt{x^2 + y^2} < x^2$. Also gilt $x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ und damit $|\Re(z)| \leq |z|$. Vertauschen von x und y ergibt $|\Im(z)| \leq |z|$.
(iii)
$$\begin{aligned} |z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \quad &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} &&= z\bar{z} + 2\Re(z\bar{w}) + w\bar{w} \\ \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \quad &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 &&= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Aus $0 < |z|+|w| < |z+w|$ folgt mit Monotonie $(|z|+|w|)^2 < (|z|+|w|)|z+w| < |z+w|^2$. Also gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.
(iv) folgt aus (i)-(iii) genau wie im reellen Fall. **q.e.d.**

Definition 2.60 (Abstand)**.** *Der Abstand zweier komplexer Zahlen ist die nicht negative Zahl* $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \quad (z, w) \mapsto d(z, w) = |z - w|$

Aus den Eigenschaften des Betrages folgt genau wie für die reellen Zahlen

Satz 2.61 (Eigenschaften des Abstandes)**.**

(i) $d(z, w) \geq 0$ *und* $d(z, w) = 0 \iff z = w$

(ii) $d(z, w) = d(w, z)$

(iii) $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$*. (Dreiecksungleichung).*

Wir veranschaulichen die komplexen Zahlen in der zweidimensionalen Ebene. Der Abstand ist der euklidische Abstand zwischen den entsprechenden Punkten der Ebene.