Martin Schmidt
Volker Eing

Analysis I
Nachklausur

08. Februar 2020

Bevor Sie beginnen, beachten Sie bitte folgendes:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es gibt 5 Aufgaben, die Gesamtanzahl der erreichbaren Punkte beträgt 50.
- Prüfen Sie ihr Klausurexemplar auf Vollständigkeit, es müssen oben rechts die Seitenzahlen 1–11 stehen.
- Wir empfehlen Ihnen, alle Aufgaben durchzulesen, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.
- Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben *möglichst* auf dem an Sie ausgeteilten Papier. Jede Aufgabe soll (*nur*) auf dem entsprechenden Blatt und dem darauf folgenden leeren Blatt, sowie den Rückseiten dieser Blätter, bearbeitet werden. Wenn Sie zusätzliches Papier benötigen, setzten Sie darauf unbedingt Ihren Namen.
- Benutzen Sie keinen Bleistift oder Rotstift zur Bearbeitung der Klausur, sondern nur schwarze oder blaue Tinte.
- Bitte schreiben Sie *sauber* und *deutlich*, und geben Sie die *gesamte* Klausur wieder ab. Das Konzeptpapier kann nicht mit abgegeben werden.
- Sie dürfen ein beidseitig bedrucktes oder beschriftetes DIN A4-Blatt benutzen. Falls Deutsch nicht Ihre Muttersprache ist, dürfen Sie außerdem ein (ein- oder zweisprachiges) Wörterbuch verwenden. Weitere Hilfsmittel (Taschenrechner, Skripte usw.) sind nicht erlaubt. Ein etwa mitgebrachtes Handy schalten Sie bitte für die Dauer der Klausur aus.
- Zu den Lösungen aller Aufgaben gehört die Angabe der von Ihnen verwendeten Notation sowie die Vollständigkeit der Rechnungen und der mathematischen Argumente.
- Es dürfen nur alle im Skript (auch mit * gekennzeichnete), in den Übungszetteln und in der Großübung bewiesene Aussagen verwendet werden. Aussagen, die von Ihren TutorInnen außerhalb des vom Lehrstuhl bereitgestellten Materials bewiesen wurden dürfen **nicht** verwendet werden.

Diesen Teil des Blattes bitte nicht beschriften.

Aufgabe		mgl. Punkte	err. Punkte	Aufgabe		mgl. Punkte	err. Punkte	**Gesamtpunktzahl:**
1	(a)	7		4	(a)	3		
	(b)	2			(b)	3		
2	(a)	4			(c)	3		
	(b)	3		5		10		**Note:**
	(c)	5						
3		10						

1. Natürlich konvergent?

(a) Für welche $a \in \mathbb{N}$ konvergiert die folgende unendliche Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n^a}.$$

(7 Punkte)

(b) Für welche $a \in \mathbb{N}$ konvergiert die in (a) definierte Reihe absolut? *(2 Punkte)*

2. Achtung die Kurve!

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{x}{e^x - x}$$

(a) Zeige, dass f auf $\mathbb{R}$ wohldefiniert ist, das heißt der Nenner nie null ist. *(4 Punkte)*

(b) Bestimme alle lokalen und alle globalen Minima und Maxima. *(3 Punkte)*

(c) Bestimme das Bild $f[\mathbb{R}]$. *(5 Punkte)*

3. Teilweiser Ersatz.

Berechne den Wert des folgenden Integrals

$$\int_0^{\pi^3} \cos(\sqrt[3]{x})dx.$$

(10 Punkte)

4. Grenzwertig.

(a) Entscheide ob der folgende Grenzwert existiert und bestimme ihn gegebenenfalls:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

(3 Punkte)

(b) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge $(\cos(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge hat.

(3 Punkte)

(c) Zeige oder widerlege durch ein Gegenbeispiel, dass für alle reellen Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $(\cos(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

(3 Punkte)

5. Herr Schneyder und seine Polynome.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ drei mal differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f genau dann mit seinem Taylorpolynom dritten Grades bei x_0 übereinstimmmt, also $T_{3,x_0}(f)(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wenn f vier mal differenzierbar ist und die vierte Ableitung $f^{(4)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. *(10 Punkte)*