Martin Schmidt
Volker Eing

Lösungen zur Klausur

1. **(a)** Für diese Aufgabe gibt es eine Standardlösung mit dem Wurzelkriterium. Danaben kann man sie auch mit dem Quotientenkriterium lösen.

Variante 1 (Wurzelkriterium): Es gibt zunächst **(1P)** für die richtige Anwendung des Wurzelkriteriums. Diesen Punkt gibt es entweder für das Wort Wurzelkrietrium oder den folgenden Ausdruck oder eine Umformung von ihm:

$$\sqrt[k]{\frac{2^k}{(k+1)^2}}$$

Um den Grenzwert dieses Ausdrucks zu berechen, muss er nach oben und unten durch Ausdrücke abgeschätzt werden, deren Grenzwerte bekannt sind wie z.B.

$$\frac{2}{(\sqrt[k]{2})^2 \cdot (\sqrt[k]{k})^2} = \frac{2}{(\sqrt[k]{2k})^2} \leq \sqrt[k]{\frac{2^k}{(k+1)^2}} \leq \frac{2}{(\sqrt[k]{k})^2} \text{ oder nur } \sqrt[k]{k} \leq \sqrt[k]{k+1} \leq \sqrt[k]{2k} = \sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k}.$$

Für jede richtige untere Schranke oder obere Schranke, die bei der Berechnung des $\limsup$ hilfreich ist, gibt es dann jeweils **(1P)**. Für die Berechnung des jeweiligen Grezwertes gibt es dann nochmal jeweils **(1P)**. Dann gibt es jeweils **(1P)** für den richtigen Wert des $\limsup$ und einen Punkt für den richtigen Wert des Konvergenzradius

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{(k+1)^2}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2^k}{(k+1)^2}} = 2 \text{ und } R = \frac{1}{2}.$$

Variante 2 (Quotientenkriterium): Wir haben das Quotientenkriterium eigentlich nur für Reihen und nicht für Potenzreihen kennengelernt. Deshalb sollte x bei der Berechnung mitgenommen werden. Allerdings folgt aus den Abschätzungen $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (für positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) und der Konvergenz von $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)_{n\in\mathbb{N}}$, dass der Konvergenzradius das inverse dieses Grenzwertes ist. Es gibt also keinen Punktabzug, wenn dieser Gernzwert richtig berechnet wurde und dann der Konvergenzradius als das inverse dieses Grenzwertes angegeben wird. Es gibt also wieder **(1P)** entweder für das Wort Quotientenkriterium oder den folgenden Ausdruck oder eine Umformungen von ihm:

$$\frac{|2^{k+1}x^{k+1}|}{(k+2)^2}\frac{(k+1)^2}{|2^k x^k|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2^{k+1}}{(k+2)^2}\frac{(k+1)^2}{2^k}.$$

Danach gibt es **(1P)** für die Vereinfachung und **(1P)** Berechnung des Grenzwertes, und **(1P)** für den richtigen Grenzwert oder $\limsup$ (siehe unten)

$$\lim_{k\to\infty} 2|x|\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 = 2|x| \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} 2\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 = 2.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $2|x| < 1$ oder $|x| < \frac{1}{2}$ **(1P)**. Diesen **(1P)** gibt schon allein dafür, dass der zweite $\limsup$ bestimmt wurde und dann einfach der Konvergenzradius als das inverse bestimmt wurde. Umgekehrt divergiert die Reihe für $2|x| > 1$ **(1P)**. Diesen **(1P)** gibt es schon allein dafür, dass der zweite $\liminf$ oder $\lim$ bestimmt wurde. Also ist der Konvergenzradius $\frac{1}{2}$ **(1P)** für das Ergebnis. Wenn also der zweite $\lim$ bestimmt wurde, dann gibt es allein für die Angabe des inversen als R **(3P)**.

(b) Die Reihe muss nach unten durch 0 **(1P)** und nach oben durch $\sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k}$ **(1P)** abgeschätzt werden. Die Berechnung dieser geometrischen Reihe ergibt **(1P)**. Es gibt alle **(3P)** für den Hinweis, dass die Aussage im Skript (Dezimabruchldarstellung) gezeigt wurde.

2. **(a)** In diesem Teil wird die Ableitung berechnet

- **(1P)** für Fallunterscheidung $x \in (0,1)$ und $x \in (1,\infty)$.
- **(1P)** für die Berechnung der Ableitung für $x \in (0,1)$:

$$f(x) = -\ln x + \frac{x-1}{\sqrt{x}}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-2\sqrt{x} + 2x - x + 1}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

- **(1P)** für die Berechnung der Ableitung für $x \in (1,\infty)$:

$$f(x) = \ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}}, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2\sqrt{x} - 2x + x - 1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

- **(1P)** für $\lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x \to 1+} f'(x)$
- **(1P)** dafür, dass erkannt wurde, dass f bei $x = 1$ differenzierbar ist.
- **(1P)** für $f'(1) = 0$ nur für den richtigen Wert.

(b) In diesem Teil wird das Monotonieverhalten untersucht.

- **(1P)** für die Bestimmung des einzigen kritischen Punktes bei $x = 1$.
- **(1P)** "$f'(x) \geq 0$" oder "f monoton wachsend" für $x \in (0,1)$.
- **(1P)** "$f'(x) \leq 0$" oder "f monoton fallend" für $x \in (0,1)$.
- **(1P)** dafür, dass $x = 1$ als ein globales Maximum erkannt wurde.

(c) In diesem Teil wird benutzt, dass $x = 1$ ein globales Maximum ist.

- **(1P)** für die Berechnung $f(1) = 0$ und die Ungleichung $f(x) \leq 0$, als die zu zeigende Ungleichung.
- **(1P)** dafür, dass $x = 1$ ein striktes Maximum ist. Diesen Punkt gibt es auch, wenn im Teil (b) in den beiden Bereichen jeweils die strenge Monotonie bzw. die strikten Unlgeichungen erkannt wurden.

3. **(a)** Dieses unbestimmte Integral kann sowohl mit partieller Integration als auch mit Substitution gelöst werden.

Variante 1 (Partielle Integration):

$$\int \underbrace{(f(x))^3}_{h=f^3} \underbrace{f'(x)}_{g'=f'} dx = \underbrace{(f(x))^3 \cdot f(x)}_{\textbf{(1P)}} \underbrace{- \int 3(f(x))^2 f'(x) \cdot f(x) dx}_{\textbf{(1P)}}.$$

Für die Umformung, die den zweiten Summanden abzieht gibt es **(1P)**:

$$4 \int (f(x)^3 f'x(x) dx = (f(x))^4 + C.$$

Insgesamt wird in den beiden Teilen (a) und (b) **(1P)** abgezogen, wenn bei einem der Ergebnisse die Konstante fehlt. Für das richtige Ergebnis **(1P)**:

$$\int (f(x))^3 f'(x)dx = \frac{(f(x))^4}{4} + C.$$

Variante 2 (Substitution): Für die Substitution **(1P)** $t = f(x)$ mit **(1P)** $dt = f'(x)dx$. Für die Stammfunktion **(1P)** $\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$. Für das Ergebnis **(1P)** (insgesamt bei (a) und (b) **(1P)** Abzug bei fehlender Konstante)

$$\int (f(x)^3 f'x(x)dx = \frac{(f(x))^4}{4} + C.$$

(b) Dieses Unbestimmte Integral kann sowohl mit Substitution als auch mit der Formel aus dem Abschnitt Partialbruchzerlegung als auch mit partieller Integration gelöst werden.
Variante 1 (Substituion): Für **(1P)** $t = 1 + x^2$ mit **(1P)** $dt = 2xdx$:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1}{2t^2}dt = \underbrace{-\frac{1}{2t} + C}_{\textbf{(1P)}} = \underbrace{-\frac{1}{2(1+x^2)} + C}_{\textbf{(1P)}}.$$

Der letzte **(1P)** für das Ergebnis (insgesamt bei (a) und (b) **(1P)** Abzug bei fehlender Konstante). Man kann auch $t = x^2$ **(1P)** substituieren mit **(1P)** $dt = 2xdx$:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \int \frac{1}{2(1+t)^2}dt = \underbrace{-\frac{1}{2(1+t)} + C}_{\textbf{(1P)}} = \underbrace{-\frac{1}{2(1+x^2)} + C}_{\textbf{(1P)}}.$$

Variante 2 (Formel aus der Partialbruchzerlegung): Setzte in der Formel aus **3. Termweise Integration** im Skript $a = 1$, $b = 0$, $p = 0$, $q = 1$ und $l = 2$:

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \underbrace{=}_{\textbf{(4P)}} -\frac{1}{2(1+x^2)} + C.$$

Hierbei muss iergendwie ersichtlich werden, dass diese Formel benutzt wurde (insgesamt bei (a) und (b) **(1P)** Abzug bei fehlender Konstante).
Variante 3 (Partielle Integration): für **(1P)** $g = \frac{1+x^2}{2}$ folgt

$$\int \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^2}}_{h} \underbrace{x}_{g'} dx = \underbrace{\frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{1+x^2}{2}}_{\textbf{(1P)}} - \underbrace{\int \frac{2x\cdot(-2)}{(1+x^2)^3}\frac{1+x^2}{2}dx}_{\textbf{(1P)}}$$

$$= \overbrace{\frac{1}{2(1+x^2)}} + \overbrace{2\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx}.$$

Wenn wir den letzten Summanden auf die rechte Seite bringen erhalten wir

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \underbrace{-\frac{1}{2(1+x^2)} + C}_{\textbf{(1P)}}.$$

für das Ergebnis (insgesamt bei (a) und (b) **(1P)** Abzug bei fehlender Konstante).

4. **(a)** Anwendung der ersten Regel von L'Hopital.

$$x^2 - 1|_{x=1} \underbrace{= 0 =}_{\textbf{(1P)}} x^2 + 2x - 3|_{x=1}, \qquad \lim_{x\to 1-} \underbrace{\frac{2x}{2x+2}}_{\textbf{(1P)}} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\textbf{(1P)}} = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}.$$

Den ersten Punkt gibt es für die Überprüfung der Voraussetzungen, den zweiten für die Berechnung der Ableitungen und den letzten für das Ergebnis.

(b) Die Funktion ist bei $x = -1$ wohldefiniert und stetig bzw. rechtsseitig stetig **(1P)**. Also folgt $\lim_{x\to -1+} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = 0$ **(2P)**. Diese **(2P)** gibt es immer, wenn der richtige Grenzwert dasteht.

(c) Variante 1 (Abschätzung durch konvergente Folge):

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \underbrace{\leq}_{\textbf{(2P)}} \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} \underbrace{=}_{\textbf{(2P)}} 0.$$

Die ersten **(2P)** gibt es für jede richtige obere Schranke an $|\cos(n)|$ bzw. für jede richtige obere **(1P)** und untere **(1P)** Schranke an $\cos(n)$ die zweiten **(2P)** für das richtige Ergebnis. Variante 2 (zweiten Regel von L'Hopital): Diese Aufgabe kann man nicht mit der zweite Regel von L'Hopital lösen. Im Fall, dass keine Abschätzung durch ein konvergente Folge angegeben wurde, die Aufgabe also nur mit der zweiten Regel von L'Hopital bearbeitet wurde, dann gibt es **(1P)** für die Berechneung der Ableitung im Nenner und Zähler und **(1P)** dafür, dass richtig erkannt wurde, dass der Quotient $\frac{-\sin(n)}{1}$ nicht konvergiert.

5. Aus der Unlgeichung folgt für $x \neq y$ **(1P)**

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y} - 0\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \underbrace{\leq}_{\textbf{(2P)}} \frac{(x-y)^2}{|x-y|} = \underbrace{|x-y|}_{\textbf{(1P)}}.$$

für festes y ist die Funktion $x \mapsto |x-y|$ stetig **(1P)** und nimmt bei $x = y$ den Wert 0 **(1P)** an. Also ist f bei y differenzierbar **(1P)** mit $f'(y) = 0$ **(1P)**. Weil das für alle y **(1P)** gilt ist f konstant **(1P)**. Den Punkt für Differenzierbarkeit und den für $f' = 0$ gibt es immer, wenn das dasteht.